第八章 相量法

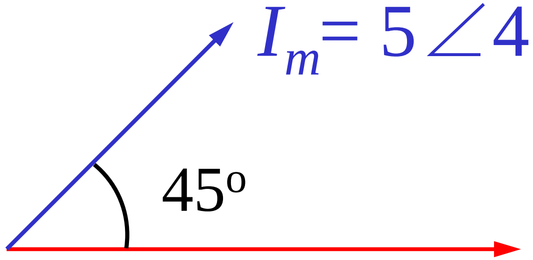
内容提要

1.正弦量及其三要素、相位差的概念；

2.相量法的概念及其性质；

3.电路定律和元件VCR的相量形式。

$\dot{I}_m = 5\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$



$\dot{U}_m = 100\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = 20\angle -45^\circ\ \Omega$$

重点

1.正弦量和相量之间的关系；

2.正弦量的相量差和有效值的概念；

3. *R*、*L*、*C*各元件的电压、电流关系的相量形式；

4.电路定律的相量形式及元件的电压电流关系的相量形式。

难点

1. 正弦量与相量之间的联系和区别；

2. 元件电压相量和电流相量的关系。主要是相位关系

是学习第 9~12 章的基础，必须熟练掌握相量法的解析运算。

§8-1 复数

1. 复数的表示形式

(1)代数形式　$F=a+\mathrm{j}b$

$\mathrm{Re}[F]=a$，　$\mathrm{Im}[F]=b$

(2) 三角形式

$F=|F|(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta)$

$a=|F|\cos\theta$，　$b=|F|\sin\theta$

$$|F|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

(3)指数和极坐标形式

根据欧拉公式

$e^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$

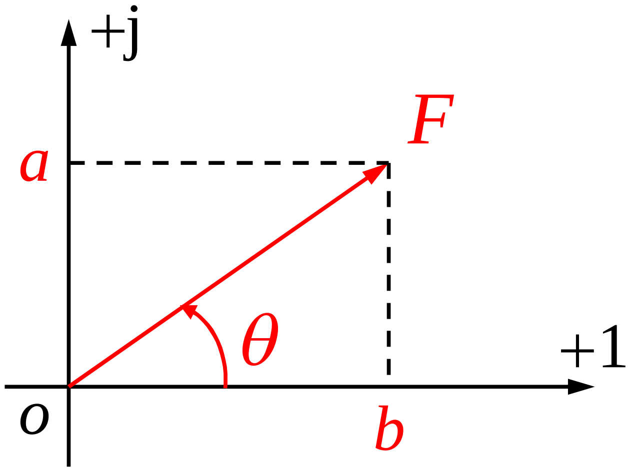
得指数形式：

$$F=|F|e^{\mathrm{j}\theta}$$

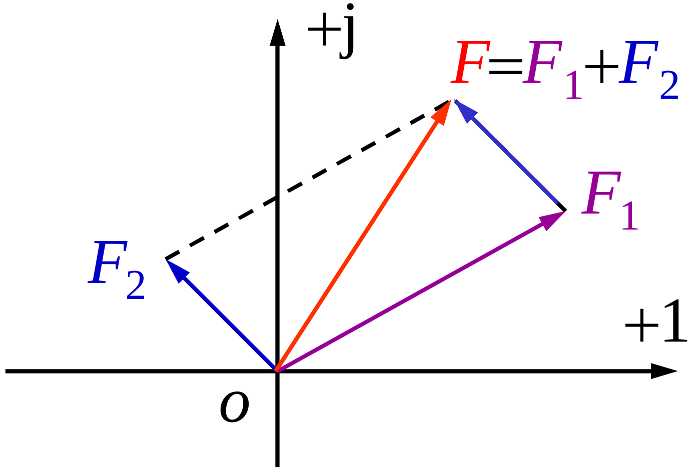
或写成极坐标形式：

$$F=|F|\underline{/\theta}$$

(4) 矢量形式



复数加、减的图解



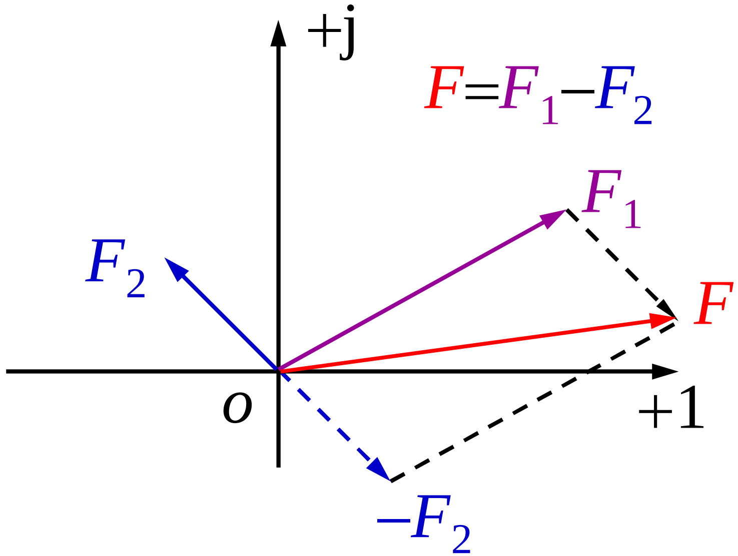
2. 复数的运算

(1)加减

用代数形式最好

设 $F_1=a_1+\mathrm{j}b_1 \qquad F_2=a_2+\mathrm{j}b_2$

则 $F_1 \pm F_2=(a_1 \pm a_2)+\mathrm{j}\,(b_1 \pm b_2)$



(2) 乘除

用指数或极坐标形式最好

设 $F_1 = |F_1| e^{j\theta_1}$， $F_2 = |F_2| e^{j\theta_2}$

则 $F = F_1 F_2 = |F_1||F_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

或 $F = |F_1||F_2| \underline{/\theta_1+\theta_2}$ $\quad F = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{|F_1|}{|F_2|} \underline{/\theta_1-\theta_2}$

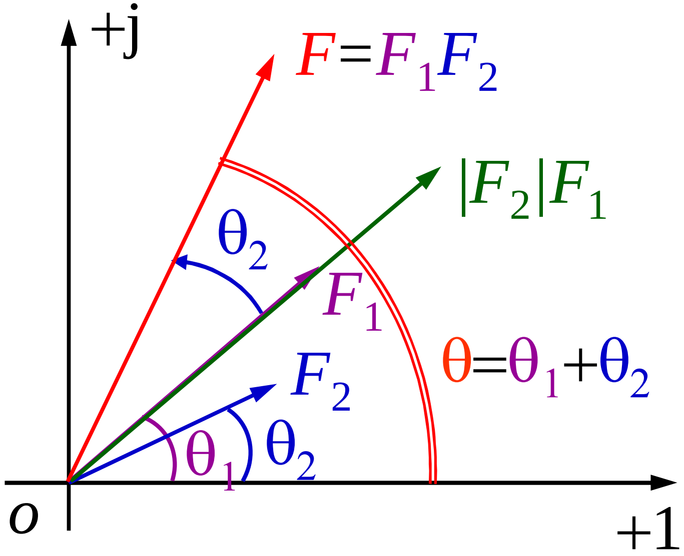
乘(除)法运算满足模相乘(除)，辐角相加(减)。

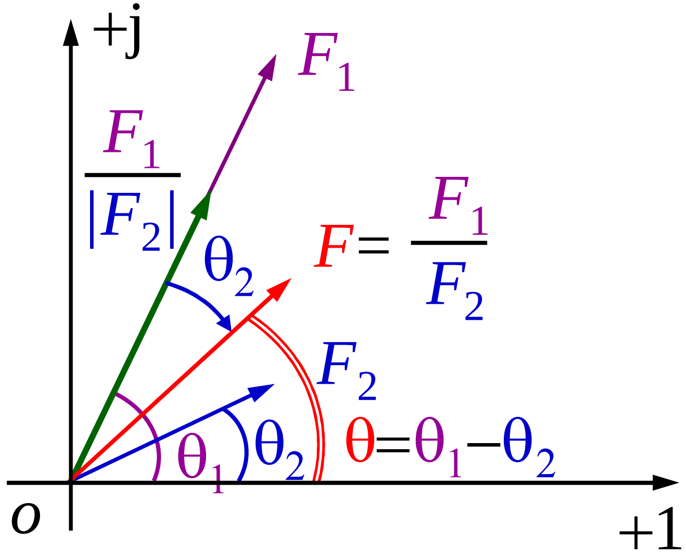
若两个复数相等 $F_1 = F_2$

则必须是 $|F_1| = |F_2|$， $\theta_1 = \theta_2$

或是 $a_1 = a_2$， $jb_1 = jb_2$

复数乘、除的图解





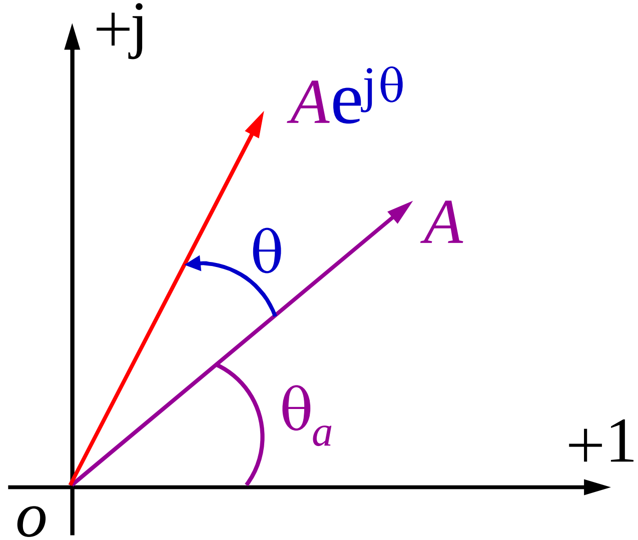
☞乘：F_1 的模被放大$|F_2|$倍，辐角逆时针旋转θ_2 。

☞除：F_1 的模被缩小$|F_2|$倍，辐角顺时针旋转θ_2 。

3. 旋转因子$e^{j\theta}$

☝ 旋转因子 $e^{j\theta}=1\angle\theta$是一个模等于1，辐角为θ的复数。

✌ 任意一个复数$A=|A|e^{j\theta_a}$乘以$e^{j\theta}$，等于把A逆时针旋转θ角度，而模$|A|$保持不变。



$$\left.\begin{aligned} e^{j\frac{\pi}{2}} &= j \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} &= -j \\ e^{j\pi} &= -1 \end{aligned}\right\}$$ 都是旋转因子

$A\times j=jA$，等于把 A 逆时针旋转90°。

$\dfrac{A}{j}=-jA$，等于把 A顺时针旋转90°。

§8-2 正弦量

☞电路中按正弦规律变化的电压或电流，统称正弦量。

👍 研究正弦电路的意义是正弦交流电有很多优点，使它应用广泛。例如：

①可以根据需要，利用变压器方便地把正弦电压升高或降低；

②电机、变压器等电气设备，在正弦交流电下具有较好的性能；

③正弦量对时间的导数、积分、几个同频率正弦量的加减，其结果仍是同频率的正弦量，这不仅使电路的分析计算变得简单，而且其结果还可以推广到非正弦周期电流电路中。

正弦量的时域表达式有两种形式

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$$

也称为瞬时值表达式

分析时不可混用，以免发生相位错误。

采用的形式以教材为准：

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \qquad u = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

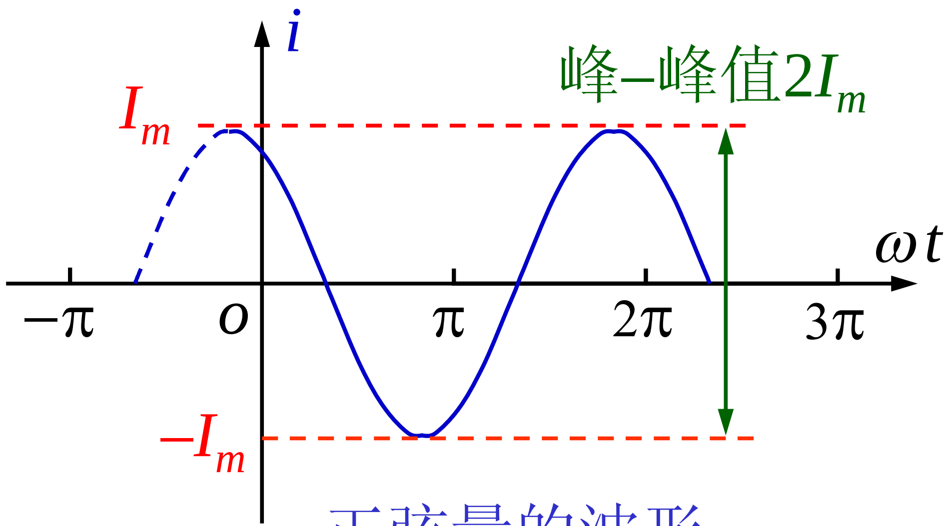
1. 正弦量的三要素（以电流为例）

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) = \sqrt{2}\, I \cos(\omega t + \phi_i)$$

(1)振幅I_m、有效值I (要素之一)

正弦量变化过程中所能达到的最大幅度；

在放大器参数中有时用峰–峰值表达。



正弦量的波形

关于有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效应，工程上采用有效值来表示。

通过比较直流电流 I 和交流电流 i 在相同时间 T 内流经同一电阻 R 产生的热效应来确定：

$$I^2RT = \int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t \longrightarrow I \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}$$

把 $i=I_m\cos(\omega t+\psi_i)$ 代入上式计算可以得到：

正弦量的有效值与振幅之间的关系：$I_m=\sqrt{2}\ I$

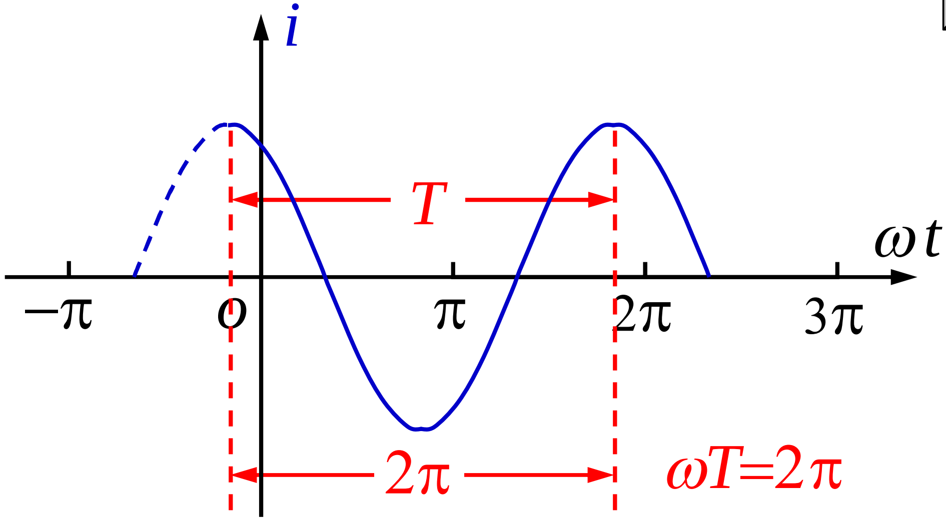
同理可得：$U_m=\sqrt{2}\ U$　　若一交流电压有效值为 $U=220\text{V}$，　则其最大值为 $U_m\approx 311\text{V}$。

需要注意的是

- 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如电网的电压等级、设备铭牌的额定值等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。
- 在测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。
- 区分电压、电流的瞬时值 i、u，振幅 I_{m}、U_m 和有效值 I、U 的符号。 另外注意$I_{\mathrm{M}}(I_{\max})$。

(2) 角频率ω、频率f、周期T (要素之二)

反映正弦量变化快慢的参数。



☝ 角频率$\omega = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t+\phi_i)$

正弦量单位时间内变化的电角度。

✌ 频率f： 正弦量每秒钟变化的周波数，单位是Hz。在工程中，常用频率区分电路：音频、高频、甚高频、特高频等等。

👌 周期T：正弦量变化一个周期所需要的时间。

ω、f、T之间的关系

$\omega = 2\pi f \quad f = \dfrac{1}{T} \quad T = \dfrac{1}{f}$

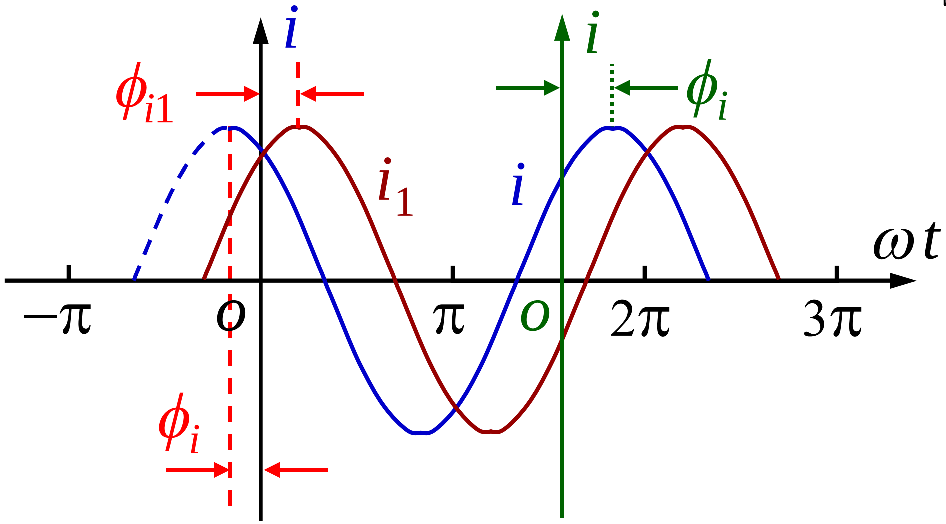
(3) 相位角、初相角 ϕ_i （要素之三）

反映正弦量的计时起点，常用角度表示。

①相位角($\omega t+\phi_i$)：随时间变化的角度, 单位: rad 或 (º)

② t=0时刻的相位角 ϕ_i 称为初相角。

- 计时起点不同，初相位不同。若正最大值发生在计时起点之前，则初相位为正，之后为负。



- 对任一正弦量，初相可以任意指定。但对多个同频率正弦量，应相对于同一个计时起点确定各自的相位。

常取主值：$|\phi_i|\leqslant 180^\circ$

2. 同频率正弦量的相位差 ！

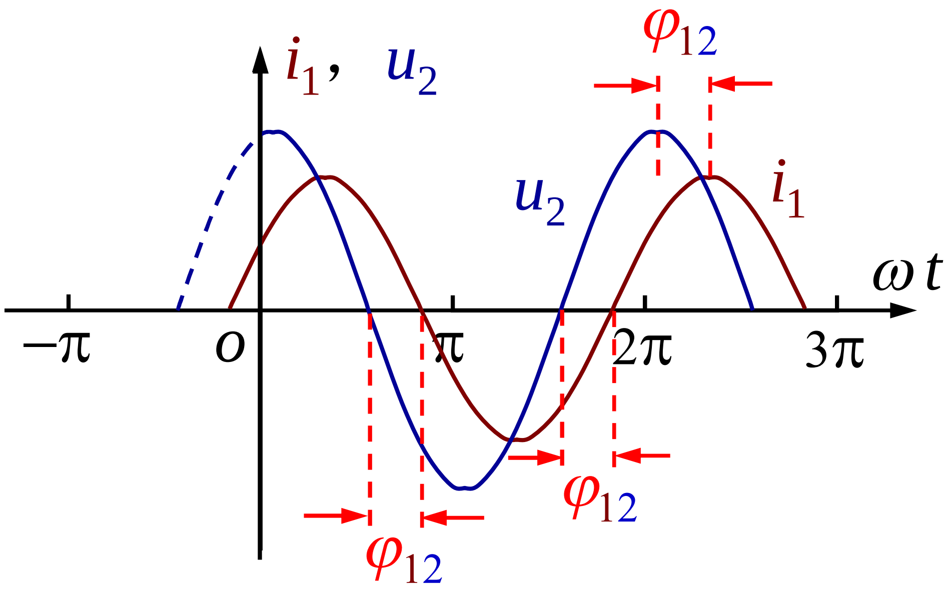
设：$i_1=I_m\cos(\omega t+\phi_{i1})$，$u_2=U_m\cos(\omega t+\phi_{u2})$

即初相之差

- 相位差φ_{12}定义为：$\varphi_{12}=(\omega t+\phi_{i1})-(\omega t+\phi_{u2})=\phi_{i1}-\phi_{u2}$

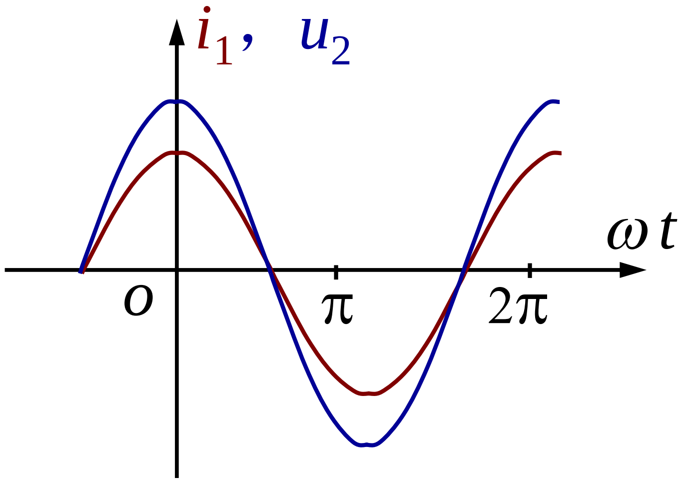
(1) $\varphi_{12}>0$，称 i 超前 u，或 u 滞后 i，表明 i 比 u 先达到最大值；

(2) $\varphi_{12}<0$，称 u 超前 i，或 i 滞后 u，表明 u 比 i 先达到最大值；

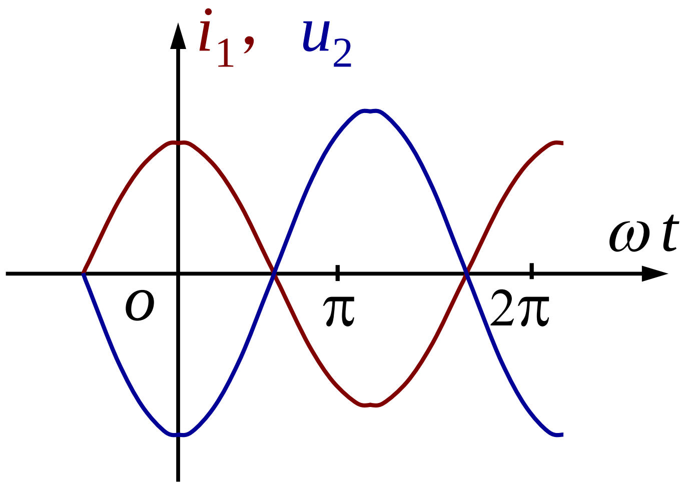


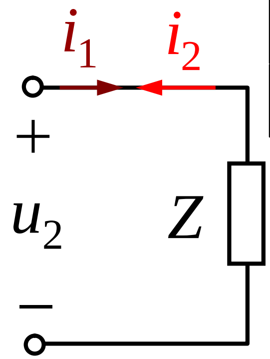
- 改变计时起点，初相不同，但相位差不变！

相位差一般取主值，即$\varphi_{12}\leqslant|\pi|$。

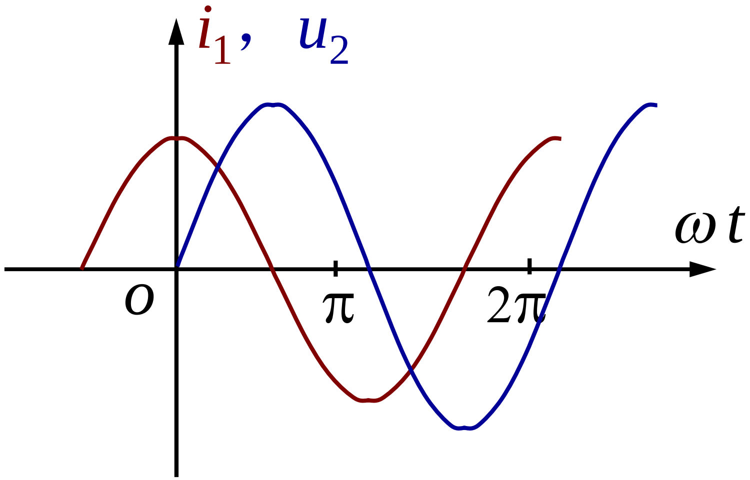


$\varphi_{12}=0$，i_1与u_2同相





$\varphi_{12}=180^o$，i_1与u_2反相



$\varphi_{12}=90^o$，i_1与u_2正交

改设参考方向时，该正弦量的初相改变π，因此与其它正弦量的相位差都改变π。

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

§ 8–3 相量法的基础

在正弦稳态线性电路中，各支路的电压和电流(响应)与电源(激励)是同频率的正弦量，因此应用KCL、KVL分析正弦电路时，将遇到正弦量的加减运算和积分、微分运算，在时域进行这些运算十分繁复，通过借用复数表示正弦信号可以使正弦电路分析得到简化 。

相量表示法的实质是用复数表示正弦量。是求解正弦电流电路稳态响应的有效工具。

1. 相量

正弦量的相量要追溯到欧拉公式: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

若 $\theta = \omega t + \phi_i$ 则 $e^{j(\omega t+\phi_i)} = \cos(\omega t+\phi_i) + j\sin(\omega t+\phi_i)$

根据叠加定理和数学理论，取实部或虚部进行分析求解，就能得到全部结果。

设: $i = I_m \cos(\omega t+\phi_i)$

则: $i = \mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\phi_i)}] = \mathrm{Re}[\underline{\underline{I_m e^{j\phi_i}}} e^{j\omega t}]$

$= \mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$

这是一个特殊的复数，其特点是辐角随时间变化。

其中，$\dot{I}_m = I_m e^{j\phi_i}$ 这是一个与时间无关的复数，模是该正弦电流的振幅，辐角是初相。

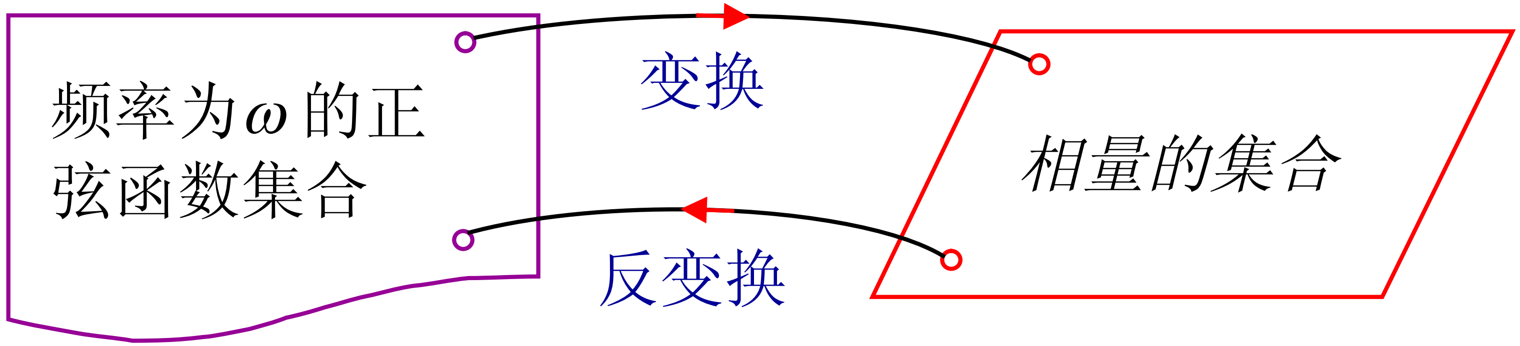
在线性电路中，若激励都是<u>同频率</u>的正弦量，则响应也都是与激励<u>同频率</u>的正弦量。在分析过程中，考虑的主要是求解振幅或有效值，初相或相位差。

因此，变换简单易行：

已知：$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \longrightarrow \dot{I}_m = I_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_i}$

简写为 $\dot{I}_m = I_m \angle \phi_i$

反过来 $\dot{U}_m = 300 \angle 30^{\circ}$ V $\longrightarrow u = 300\cos(\omega t + 30^{\circ})$ V



时域与相量域的映射

正弦量与相量的关系是一种数学变换关系。不是相等的关系！

正弦量→相量，可认为是正变换；

相量→正弦量，可认为是反变换。

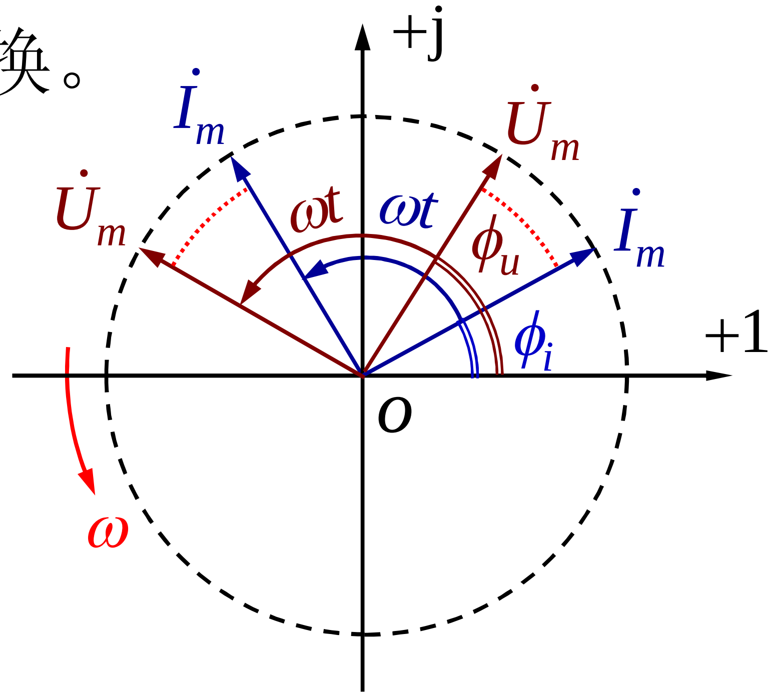
$$\dot{I}_m = I_m \angle \phi_i$$

是 $[I_m \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\phi_i} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}]$ 的复常数部分。

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

是 $[I_m \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\phi_i} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}]$ 的实部。

任意时刻，两者相对位置不变。因此，可用不含旋转因子$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$的复数表示正弦量。



旋转相量的实部等于正弦量

2. 相量的性质

(1)线性性质

若 $i_1 = I_{m1}\cos(\omega t+\phi_{i1}) \longrightarrow \dot{I}_{m1} = I_{m1}\angle\phi_{i1}$

$i_2 = I_{m2}\cos(\omega t+\phi_{i2}) \longrightarrow \dot{I}_{m2} = I_{m2}\angle\phi_{i2}$

则 $i=i_1+ i_2 \longrightarrow \dot{I}_m = \dot{I}_{m1}+ \dot{I}_{m2}$ 这是叠加性质

相量也具有比例性质： $k\, i_1 \longrightarrow k\, \dot{I}_{m1}$

由叠加性质和比例性质可知

$$k_1 i_1 \pm k_2 i_2 \pm \cdots \longleftrightarrow (k_1\dot{I}_1 \pm k_2\dot{I}_2 \pm \cdots)$$

(2) 微分性质

设 $i=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$ $\longrightarrow$ $\dot{I}_m = I_m\angle\phi_i$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\omega I_m\cos(\omega t+\phi_i+90^\mathrm{o}) = \mathrm{Re}[\omega\,\dot{I}_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}]$$

$$= \mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\,\dot{I}_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \longrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}_m = \omega I_m\angle\phi_i+90^\mathrm{o}$$

☞正弦量的微分是一个同频正弦量，时域内的一次微分，对应于相量域内乘以jω。

其结果是模变为ωI_m，相位比原相量超前90$^\mathrm{o}$。

对高阶导数有 $\dfrac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}i^n} \longleftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n\dot{I}_m$

(3) 积分性质

设 $u=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$ $\longrightarrow$ $\dot{U}_m = U_m\angle\phi_u$

则 $\int u\mathrm{d}t = \dfrac{U_m}{\omega}\cos(\omega t+\phi_u-90^{\circ}) = \mathrm{Re}[\dfrac{\dot{U}_m}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

☞正弦量的积分是一个同频正弦量，时域内的一次积分，对应于相量域内除以jω。

其结果是模变为(U_m/ω)，相位比原相量滞后90°。

对n重积分有 $\iint\cdots\int u\mathrm{d}t \longleftrightarrow \dfrac{\dot{U}}{(\mathrm{j}\omega)^n}$

例题分析

设 $i_1=10\sqrt{2}\cos(314t+60^o)$ A $\longrightarrow$ $\dot{I}_1=10\angle 60^o$ A

$i_2=22\sqrt{2}\cos(314t-150^o)$ A $\longrightarrow$ $\dot{I}_2=22\angle -150^o$ A

求：$\dfrac{di_1}{dt}$ $\quad \int i_2\,dt \quad$ i_1+i_2

解：变换为相量形式求解

$$\frac{di_1}{dt} \longrightarrow j\omega\,\dot{I}_1 = j314\times 10\angle 60^o = 3140\angle 60^o+90^o$$

所以 $\dfrac{di_1}{dt}=3140\sqrt{2}\cos(314t+150^o)$

$$\int i_2\,dt \longrightarrow \frac{\dot{I}_2}{j\omega} = \frac{22\angle -150^o-90^o}{314} = 0.07\angle 120^o$$

所以 $\int i_2\,dt = 0.07\sqrt{2}\cos(314t+120^o)$

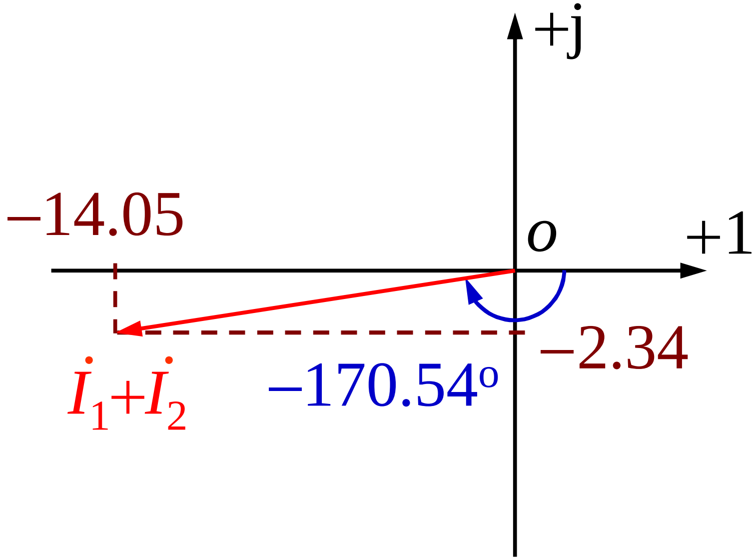
$\dot{I}_1 = 10\angle 60^\circ = 5 + j8.66\ \text{A}$ $\quad \dot{I}_2 = 22\angle -150^\circ = -19.05 - j11\ \text{A}$

$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (5 - 19.05) + j(8.66 - 11) = (-14.05 - j2.34)\ \text{A}$

$I = \sqrt{14.05^2 + 2.34^2} = 14.24\ \text{A}$

ϕ_i为第3象限角：

$$\phi_i = -180^\circ + \text{arctg}\,\frac{-2.34}{-14.05}$$



$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 14.24\angle -170.54^\circ\ \text{A}$

$i_1 + i_2 = 14.24\sqrt{2}\cos(314t - 170.54^\circ)\ \text{A}$

引入相量的优点是

☝把时域问题变为复数问题；

✌把微积分方程的运算变为复数方程运算；

需要注意的是

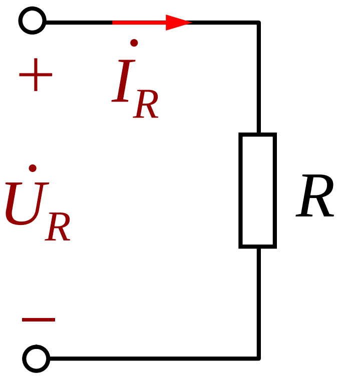
☝相量法实质上是一种变换，通过把正弦量转化为相量，而把时域里正弦稳态分析问题转为频域里复数代数方程问题的分析；

✌相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线电路；

👌相量法用来分析正弦稳态电路。

2. 元件VCR的相量形式

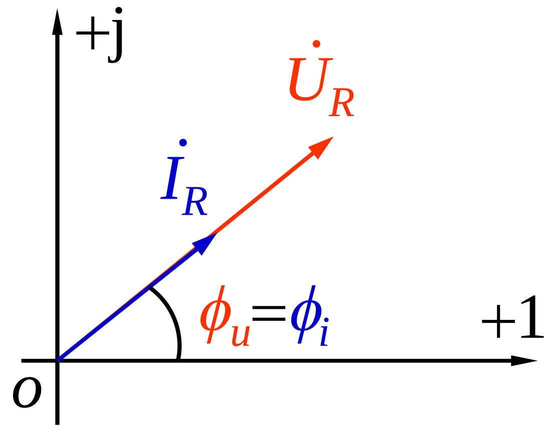
(1) 电阻元件



$$u_R = R\, i_R \xrightarrow{\text{比例性质}} \underline{\dot{U}_R = R\,\dot{I}_R}$$

$$\underline{\dot{I}_R = G\,\dot{U}_R}$$

☞ 电阻元件两端的电压与流过它电流<u>同相位</u>！



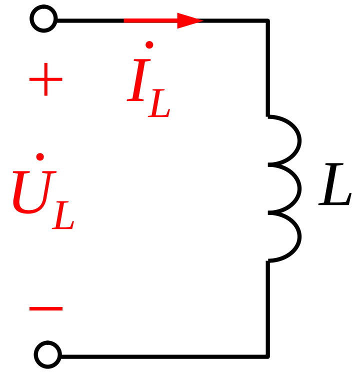
有效值的关系：

$$U_R = R\, I_R \quad \text{或} \quad I_R = G\, U_R$$

(2)电感元件

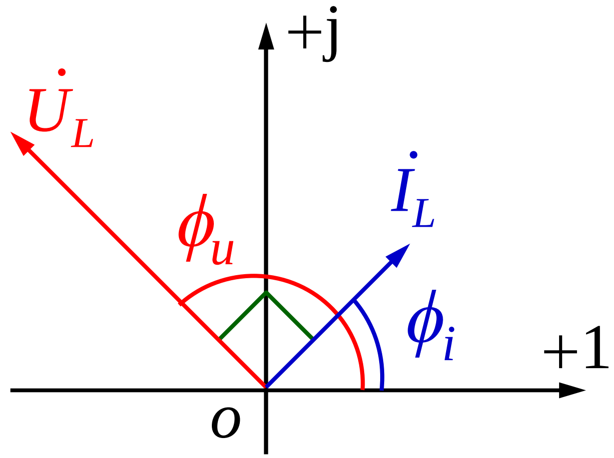
$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{微分性质}} \dot{U}_L = L(\mathrm{j}\omega)\dot{I}_L$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\ \dot{I}_L$$



☞在L中，电压超前于电流90°！

或电流滞后于电压90°！



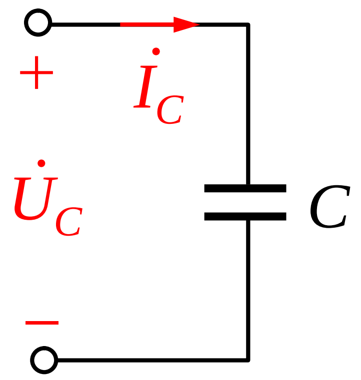
有效值的关系：$U_L=\omega L I_L$

$$\frac{U_L}{I_L} = \omega L$$

☞ωL也具有电阻的量纲。并与频率 f 成正比！

(3)电容元件

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{微分性质}} \dot{I}_C = C(\mathrm{j}\omega\dot{U}_C)$$



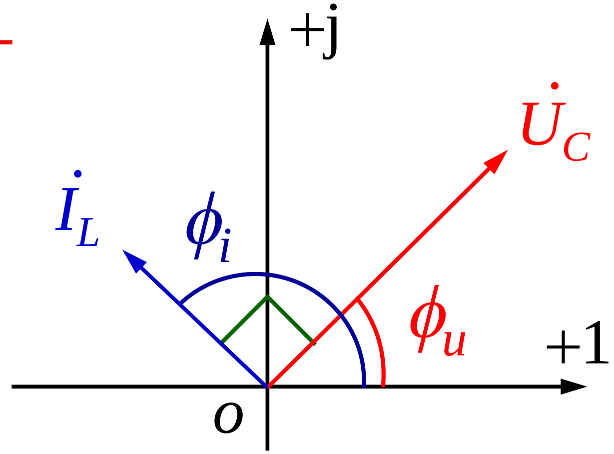
$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \quad 或 \quad \underline{\dot{U}_C = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C}$$

☞在C中，电流超前于电压90°！

或电压滞后于电流90°！

有效值的关系 $U_C = \frac{1}{\omega C} I_C$

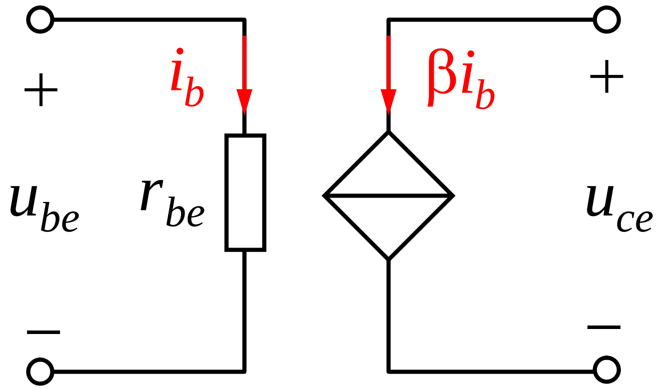
$$\frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$$



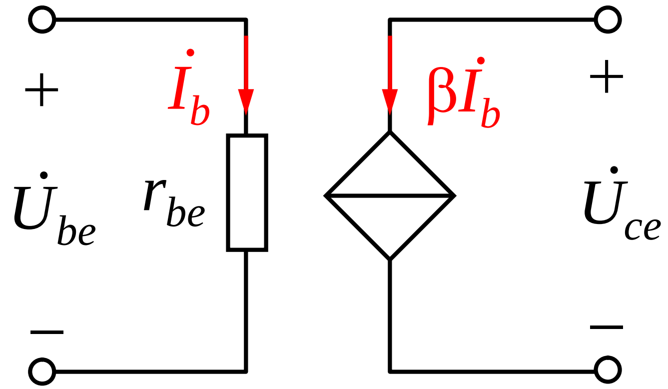
☞(1/ωC)也具有电阻的量纲，且与频率 f 成反比！

4. 受控源的相量表示

☞控制系数μ、g、r和β都是常数，因此，根据相量的比例性质，可以直接用与正弦量对应的相量表示。



用瞬时值表示的CCCS



用相量表示的CCCS

已知电源电压 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$ V，求电源电流 $i(t)$。

解：电压源电压的相量为：

$\dot{U}=120\underline{/0^{\circ}}$ V

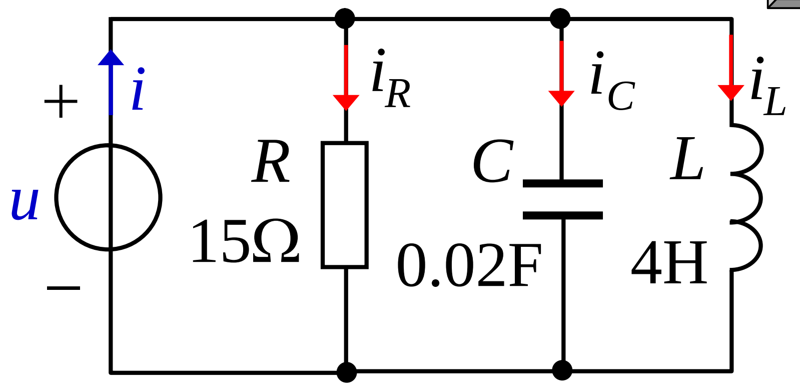
$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{5\times 0.02}=10\Omega$$

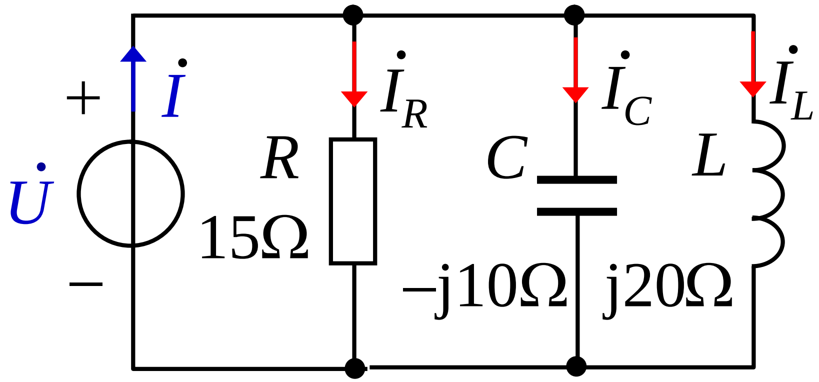
$$\omega L=5\times 4=20\Omega$$

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}}{R}=\frac{120}{15}=8\text{ A}$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}}{-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}=\frac{120}{-\mathrm{j}10}=\mathrm{j}12\text{ A}$$

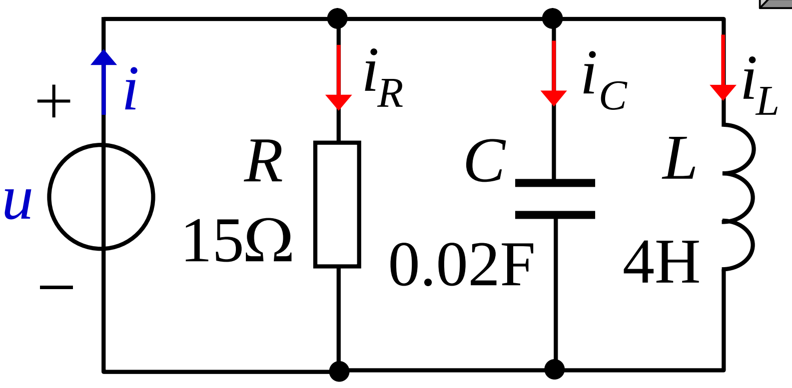
$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega L}=\frac{120}{\mathrm{j}20}=-\mathrm{j}6\text{ A}$$





$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C+\dot{I}_L$$
$$=8+\mathrm{j}12-\mathrm{j}6\text{ A}$$

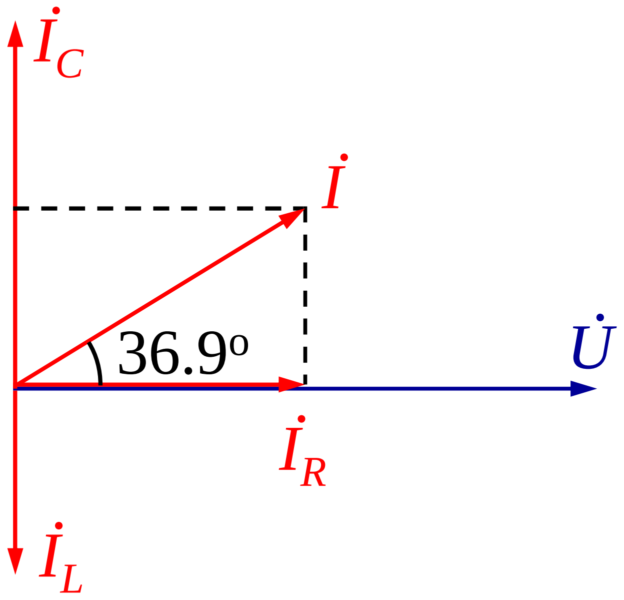
已知电源电压$u(t)$=120$\sqrt{2}$ cos(5t) V，求电源电流$i(t)$。

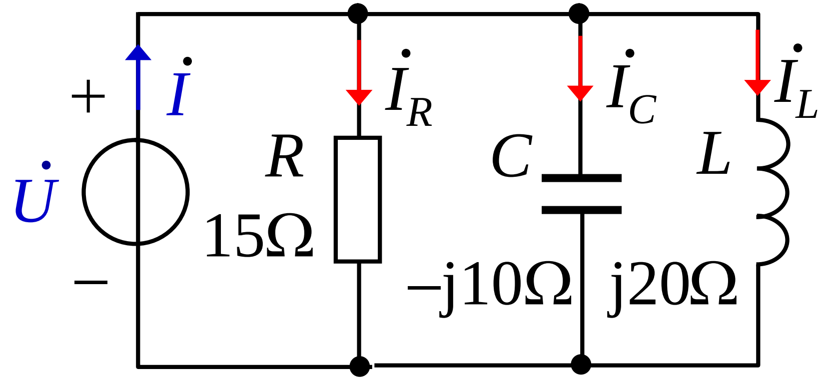


$$\dot{I} = 8 + \text{j}6 = 10\angle 36.9^{\circ}\ \text{A}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2}\cos(5t + 36.9^{\circ})\ \text{A}$$

相量图如下：





$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L$$

$$= 8 + \text{j}12 - \text{j}6\ \ \text{A}$$

本章结束