第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

内容提要与基本要求

1.换路定则和电路初始值的求法；

2.掌握一阶电路的零输入响应、零状态响应、全响应的概念和物理意义；

3.会计算和分析一阶动态电路(重点是三要素法)；

4.了解二阶电路零状态响应、零输入响应、全响应的概念和物理意义；

5.会分析简单的二阶电路；

6.会计算一阶电路的阶跃响应、冲激响应；

7.会用系统法列写简单的状态方程。

重点

(1)动态电路方程的建立和动态电路初始值的确定；

(2)一阶电路时间常数的概念与计算 ；

(3)一阶电路的零输入响应和零状态响应；

(4)求解一阶电路的三要素法；

(5)暂态分量(自由分量)和(稳态分量)强制分量概念；

(6)二阶电路的零输入、零状态和全响应的概念；

(7)二阶电路的方程和特征根、过渡过程的过阻尼、欠阻尼及临界阻尼的概念及分析；

(8)二阶电路的阶跃响应。

难点

(1)应用基尔霍夫定律和电感、电容的元件特性建立动态电路方程;

(2)电路初始条件的概念和确定方法;

(3)二阶电路的过阻尼、欠阻尼及临界阻尼放电过程分析方法和基本物理概念。

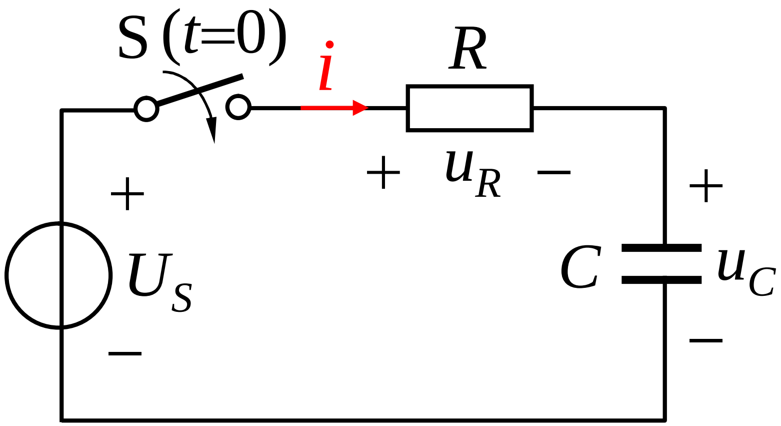
与其它章节的联系

本章讨论的仍是线性电路，因此前面讨论的线性电路的分析方法和定理全部可以用于本章的分析中。第9章讨论的线性电路的正弦稳态响应就是动态电路在正弦激励下的稳态分量的求解。

§ 7–1 动态电路的方程及其初始条件

引 言

自然界事物的运动，在一定的条件下有一定的稳定状态。当条件发生变化时，就要过渡到新的稳定状态。从一种稳定状态转到另一种新稳定状态时，往往不能跃变，而是需要一定时间，或者说需要一个过程，在工程上称过渡过程。



接通电源，C 被充电，C 两端的电压逐渐增长到稳态值 U_s，即要经历一段时间。

电路中的过渡过程虽然短暂，在实践中却很重要。

一、动态电路的基本概念

- 含有动态元件(L、C)的电路称为动态电路。描述动态电路的方程是微分方程。
- 全部由线性非时变元件构成的动态电路，其描述方程是线性常系数微分方程。
- 只含一个动态元件(L或C)的电路，其描述方程是一阶线性常系数微分方程，称一阶电路。

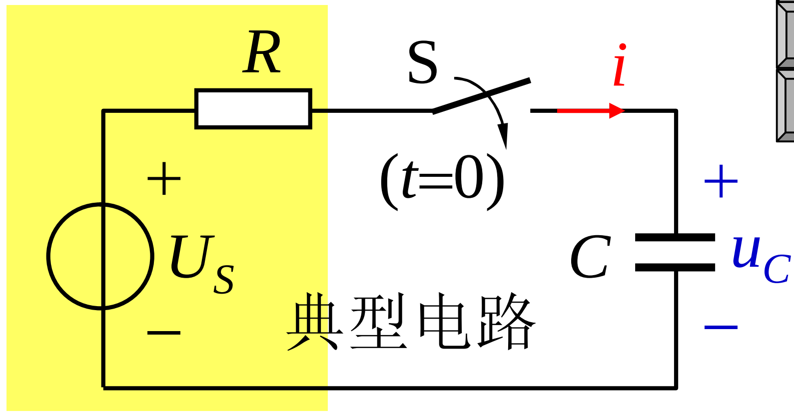
- 一阶电路有3种分析方法：

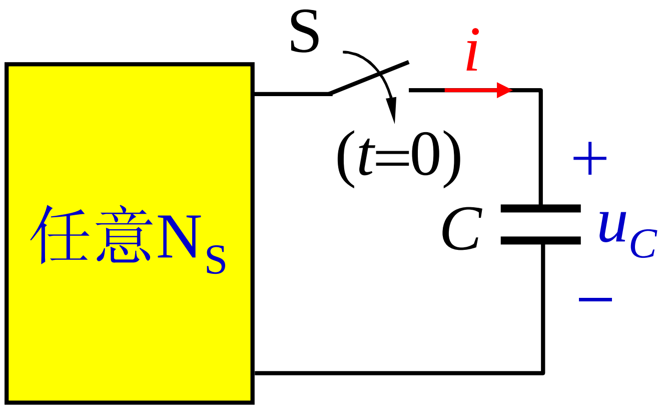
1. 经典法

列写电路的微分方程，求解电流和电压。是一种在时间域中进行的分析方法。

2. 典型电路分析法

记住一些典型电路(*RC*串联、*RL*串联、 *RC*并联、*RL*并联等) 的分析结果，在分析非典型电路时可以设法套用。





3. 三要素法

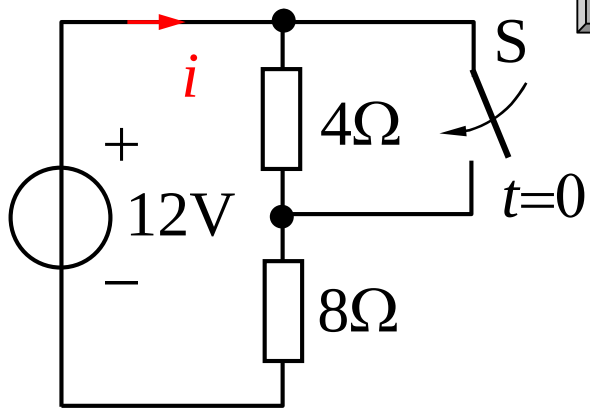
只要知道一阶电路的三个要素，代入一个公式就可以直接得到结果，这是分析一阶电路的最有效方法。

重点掌握3， 1、2两种方法可掌握其中之一。

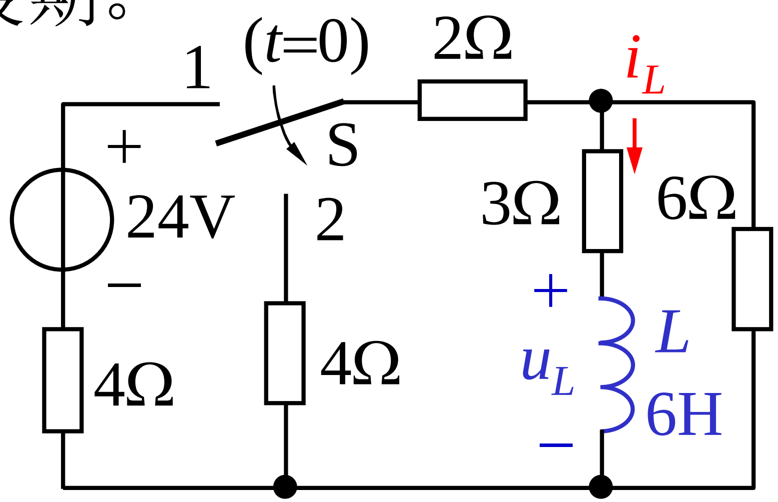
二、换路及换路定则

1.换路

电路结构或元件参数的改变称为换路。换路是在t=0 (或 $t = t_0$) 时刻进行的。



纯电阻电路在换路时没有过渡期。



含有动态元件的电路换路时存在过渡过程，过渡过程产生的原因是由于储能元件L、C，在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放需要一定的时间来完成。

2. 换路定则

线性电容C的电荷 $q(t)=q(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

以$t=t_0=0$作为换路的计时起点：换路前最终时刻记为$t=0_-$，换路后最初时刻记为$t=0_+$。

在换路前后： $q(0_+)=q(0_-)+\int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

0_-到0_+瞬间，$i_C(t)$为有限值时，积分为0。

$q(0_+)=q(0_-)$ C上的电荷不能跃变！

由$q(t)=C\,u_C(t)$可知，当换路前后C不变时

$u_C(0_+)=u_C(0_-)$ C两端的电压也不能跃变！

$q(0_+) = q(0_-)$ $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 同理可得：

$\Psi(0_+) = \Psi(0_-)$ L中的磁链不能跃变！

由 $\Psi(t) = Li_L(t)$ 可知，当换路前后L不变时

$i_L(0_+) = i_L(0_-)$ L中的电流也不能跃变！

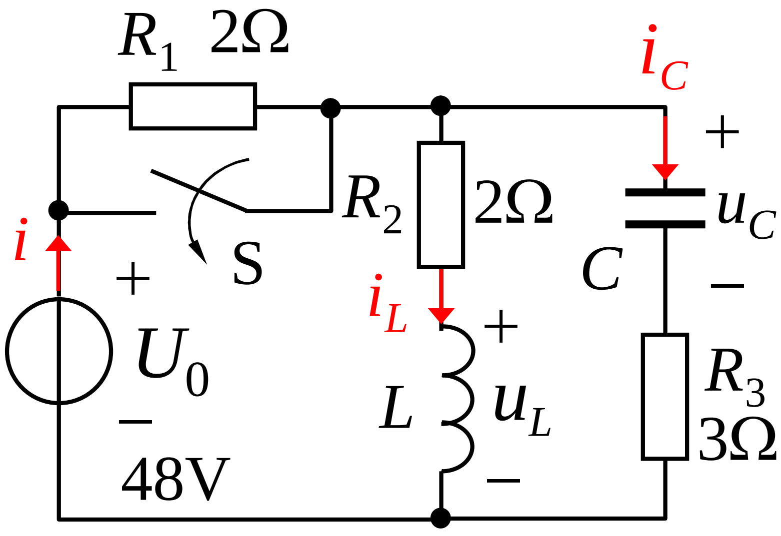
换路定则表明

(1)换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）在换路前后保持不变，这是电荷守恒定律的体现。

(2)换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）在换路前后保持不变。这是磁链守恒定律的体现。

三、初始值的计算

求图示电路在开关闭合瞬间各支路电流和电感电压。

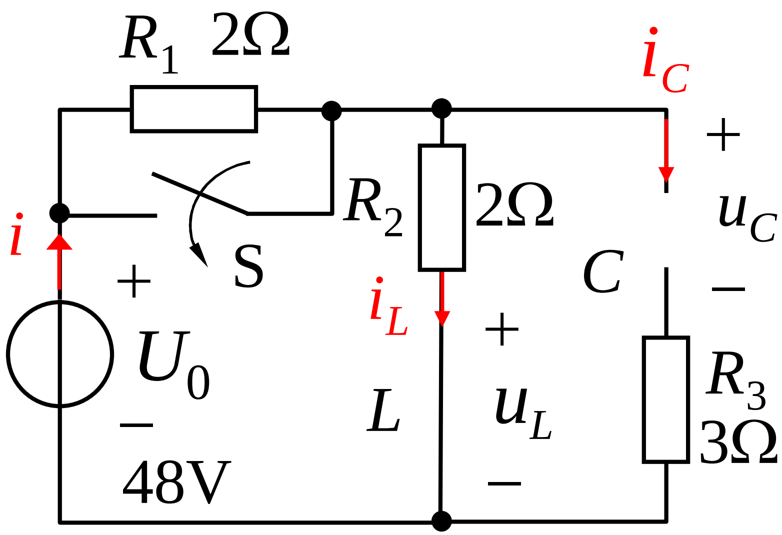


换路前的“旧电路”

解： 1. 由换路前的“旧电路”计算$u_C(0_)$和$i_L(0_)$ 。

$i_C(0\_)=0$，C视为开路。

$u_L(0\_)=0$，L视为短路。



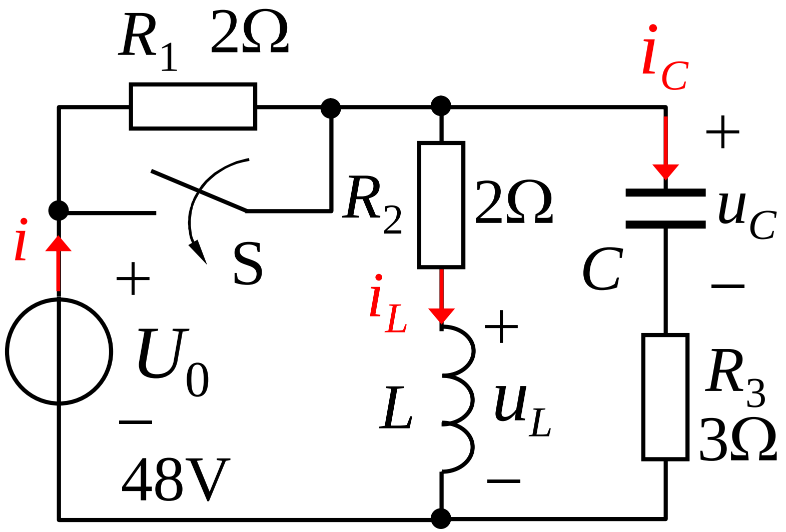
由等效电路算出

$$i_L(0\_) = 12\text{A} = i_L(0_+)$$

$$u_C(0\_) = 24\text{V} = u_C(0_+)$$

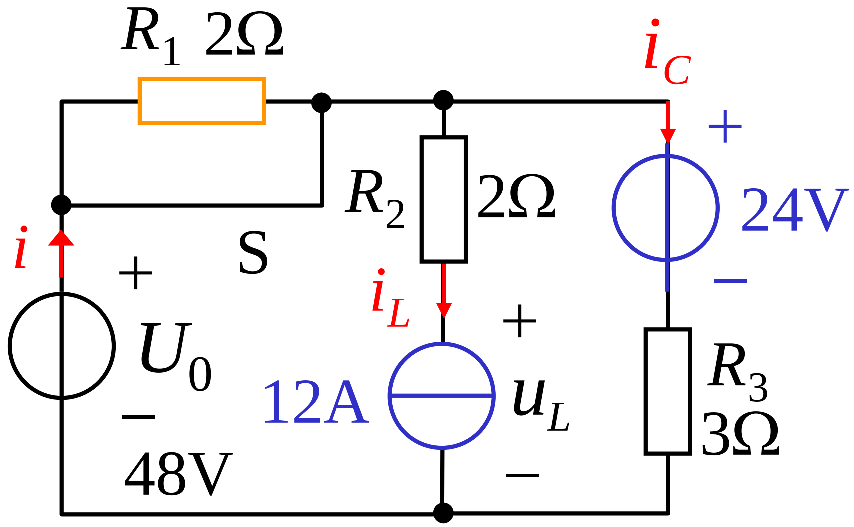
$$i_L(0_-) = 12\text{A} = i_L(0_+)$$

$$u_C(0_-) = 24\text{V} = u_C(0_+)$$



2. 画出t=0$_+$等效电路：电感用电流源替代，电容用电压源替代。

$$i_C(0_+) = \frac{48-24}{3} = 8\text{A}$$



t=0$_+$时刻的等效电路

$$u_L(0_+) = 48-2\times 12 = 24\text{V}$$

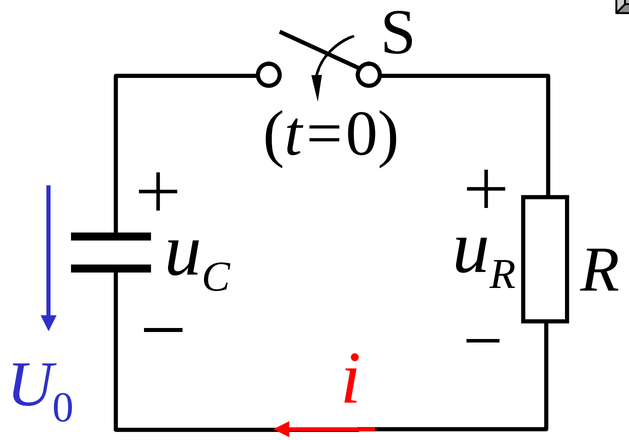
$$i(0_+) = i_L(0_+) + i_C(0_+)$$

$$= 12 + 8 = 20\text{A}$$

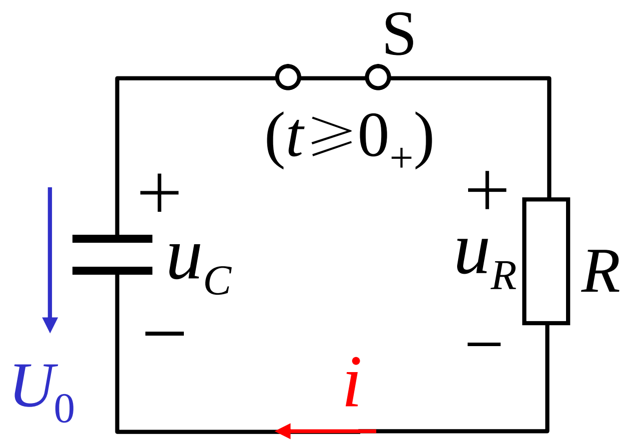
§7-2 一阶电路的零输入响应

➢ 零输入响应：在电源激励为零的情况下，由动态元件的初始值(≠0)引起的响应。

1. RC 电路



分析 RC 电路的零输入响应，实际上是分析其放电过程。



换路后的"新电路"

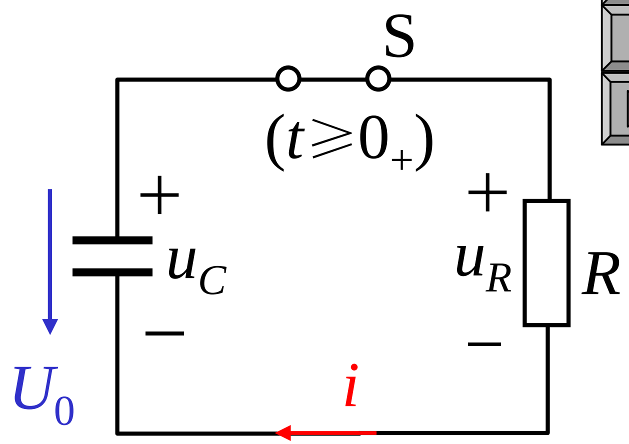
$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \qquad u_R = Ri = -RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

由KVL得： $RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$

一阶齐次微分方程

$RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_C=0$ 特征方程

$RCp+1=0$ 特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$



通解 $u_C=A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

由初始条件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ 得：

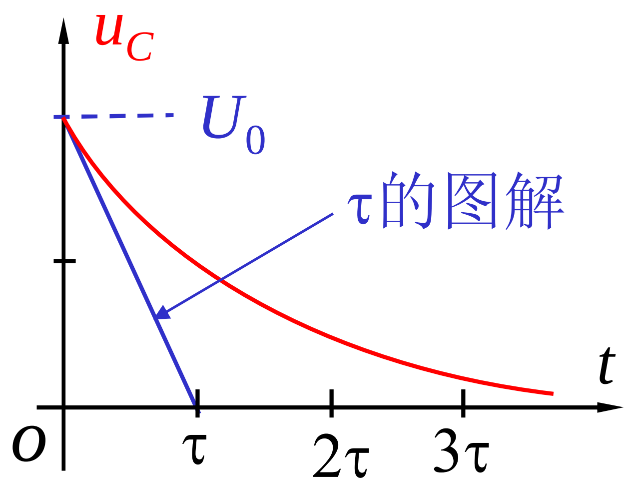
$$u_C=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ ,\quad t\geqslant 0$$

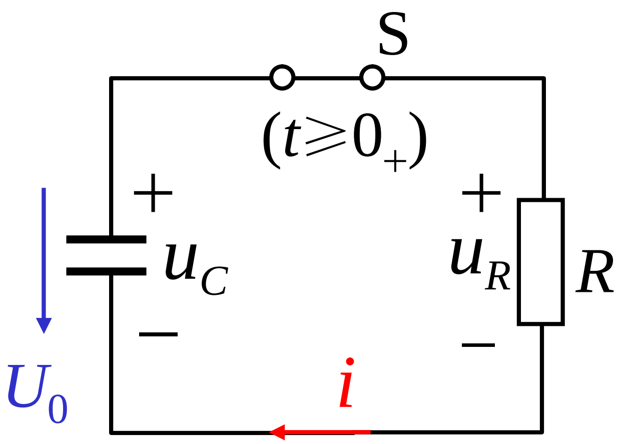
$\tau=RC$ 称RC电路的<u>时间常数</u>。

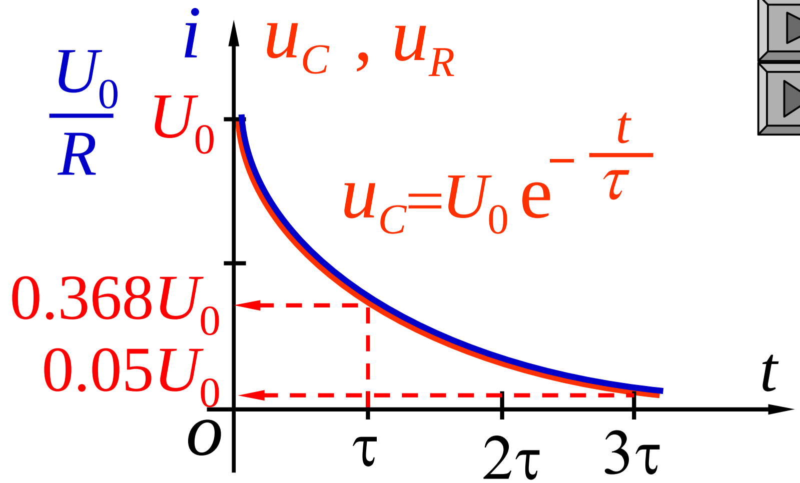
若R取Ω，C取F，则τ为s。

τ 的大小，反映u_C的变化快慢：

τ 越大， u_C衰减越慢。







- 在理论上，要经过无限长时间， u_C才能衰减到0。
- 在工程上，认为经过$3\tau\sim5\tau$时间，过渡过程即告结束。

$$u_R = u_C = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

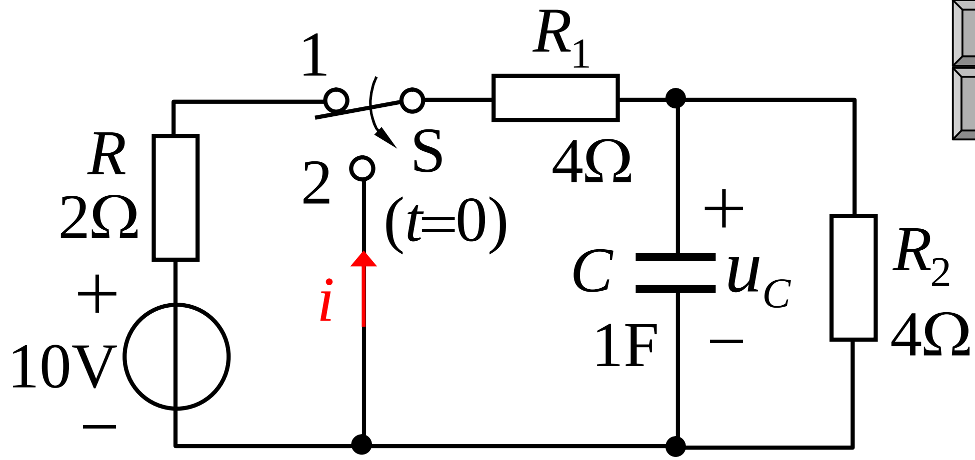
$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2(t)\,R\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$$

C储存的能量全被R 吸收，并转换成热能消耗掉。

例：试求$t \geqslant 0$时的$i(t)$。

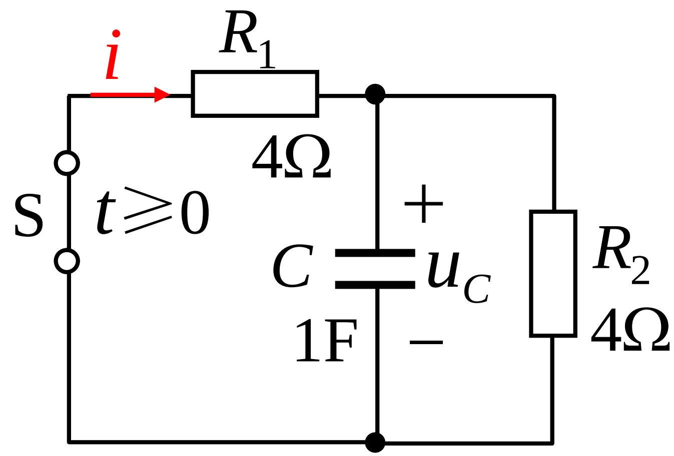


解：

$$u_C(0_-) = \frac{10 \times 4}{2+4+4} = 4\ \text{V}$$

根据换路定则：

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 4\ \text{V}$$



换路后，C通过$(R_1//R_2)$放电，

$R_{eq} = R_1//R_2 = 2\Omega$。

所以 $\tau = R_{eq}C = 2\ \text{s}$

引用典型电路结果：

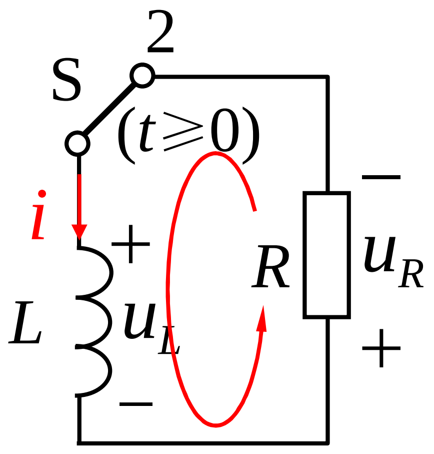
$$u_C = u_C(0_+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 4\,\mathrm{e}^{-0.5t}\ \text{V}$$

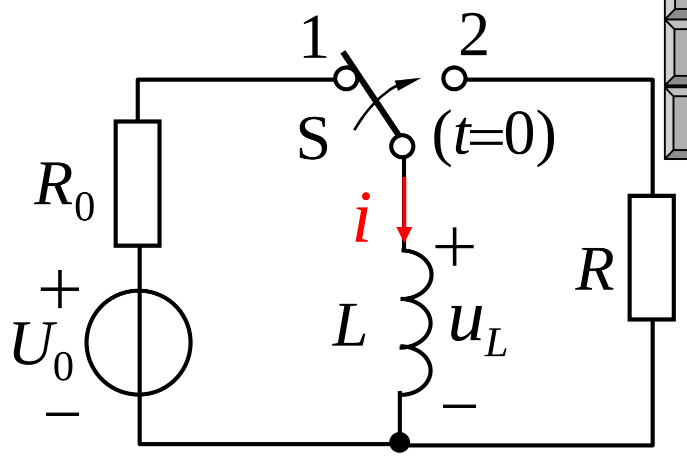
$(t \geqslant 0)$

$$i = -\frac{1}{2}\frac{u_C}{R_{eq}} = -\mathrm{e}^{-0.5t}\ \text{A}$$

$(t \geqslant 0)$

2. *RL*电路





由KVL

$$u_L + u_R = 0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

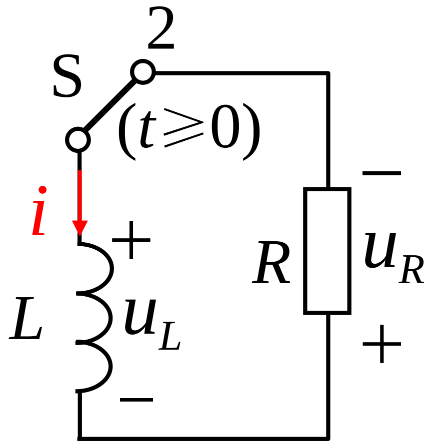
$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0 \xrightarrow{\text{解之}} i(t) = i(0_+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

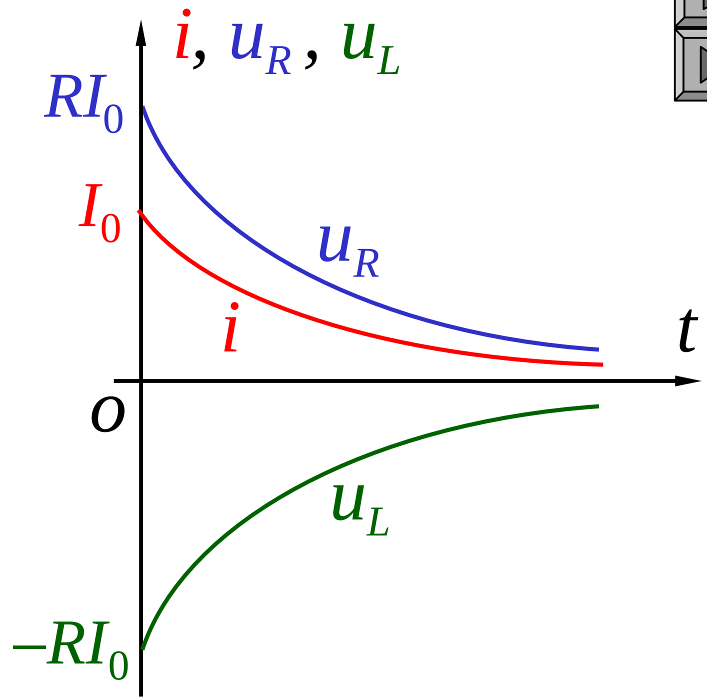
代入初试条件 $i(0_+) = i(0_-) = \dfrac{U_0}{R_0}$

得 $i(t) = \dfrac{U_0}{R_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ 基本形式：$i(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $(t \geqslant 0)$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ 为*RL*电路的时间常数。 $[\mathrm{s}] = \dfrac{[\mathrm{H}]}{[\Omega]}$

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$





电阻和电感上的电压分别为：

$$u_R = Ri$$

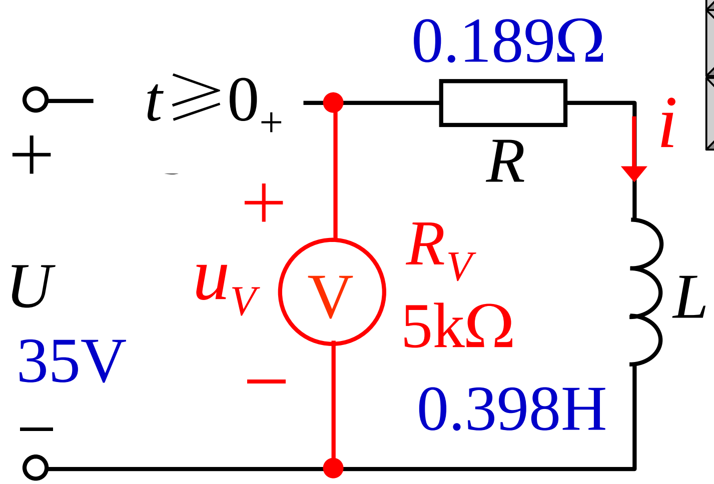
$$= R I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (t \geqslant 0)$$

$$u_L = -u_R = -R I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (t \geqslant 0)$$

或者：$u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -R I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (t \geqslant 0)$

3.例题分析 P144 例7−2

试求：τ；$i(0_+)$和$i(0_-)$；$i(t)$和$u_V(t)$；$u_V(0_+)$。 解：



某300kW汽轮发电机励磁回路的电路模型

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} = \frac{0.398}{0.189+5\times10^3}$$

$$= 79.6\ (\mu s)$$

$$i(0_-) \approx \frac{U}{R} = \frac{35}{0.189} = 185.2\ \text{A} = i(0_+)$$

$$i(t) = 185.2\ e^{-12560t}\ \text{A}$$

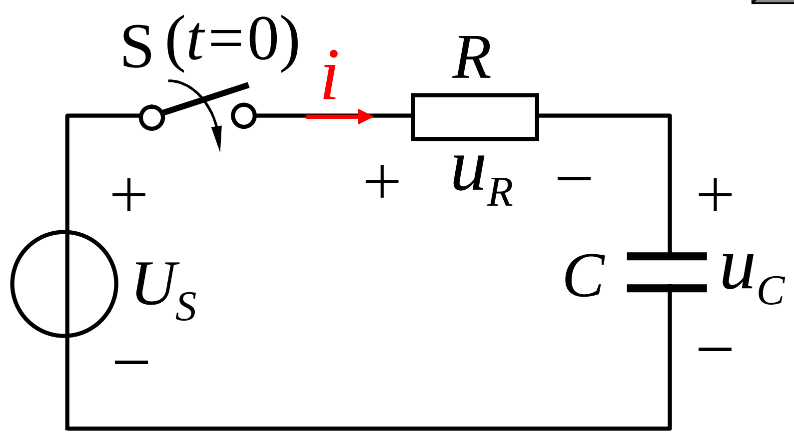
$$u_V(t) = -R_V\, i(t) = -926\ e^{-12560t}\ \text{kV}$$

$u_V(0_+) = 926\ \text{kV}$！电压表的量程才50V。

实践中，要切断 L 的电流，必须考虑磁场能量的释放问题

§7-3 一阶电路的零状态响应

➢ 零状态响应：在动态元件初值为 0 的状态下，外施激励引起的响应。



1. RC电路

由KVL： $u_R + u_C = U_S$

$$u_R = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S$$

常系数非齐次线性方程

其解为： $u_C = u'_C + u''_C$

对应的齐次方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

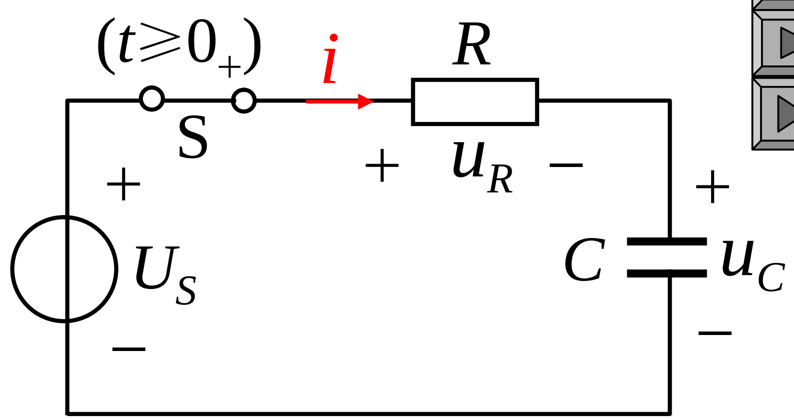
通解： $u''_C = A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

特解： $u'_C = U_S$

所以： $u_C = U_S + A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C=U_S+A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

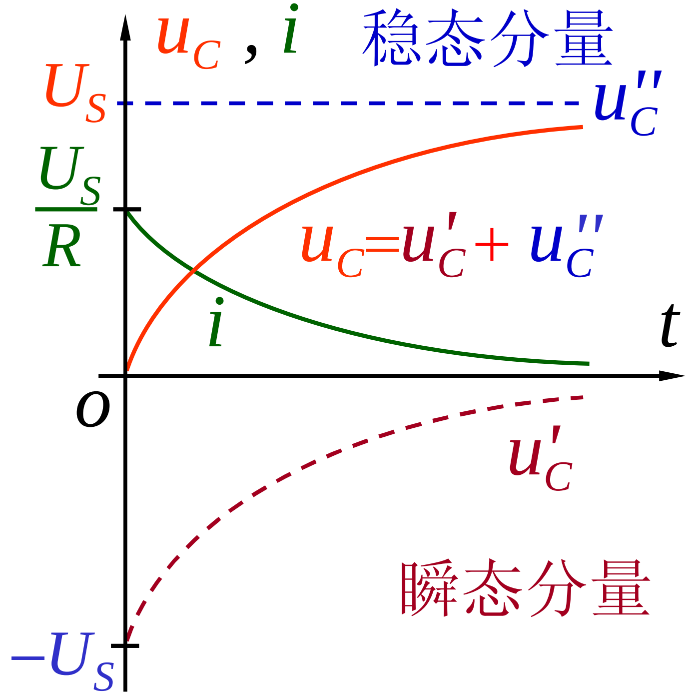


代入初值：$u_C(0_+)=u_C(0\_)=0$

求得：$A=-U_S$

所以零状态响应为

$$u_C=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),\quad \tau=RC$$



$$i=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C=U_S-U_S\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C=U_S+A\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

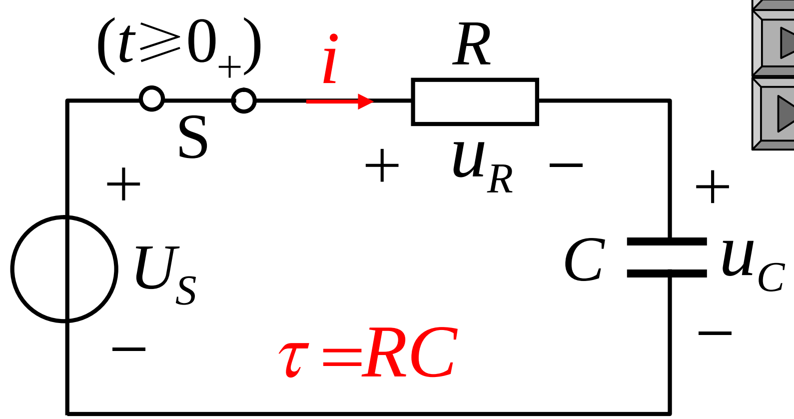
$$i=C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

电源提供的能量：

$$W=\int_0^{\infty}U_S\,i\,(t)\,\mathrm{d}t=CU_S^2$$

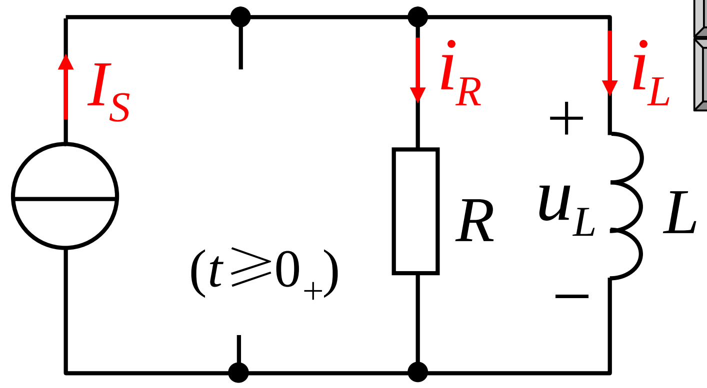
电阻吸收的能量：

$$W_R=\int_0^{\infty}i^2\,(t)\,R\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}CU_S^2$$



结果表明：电源提供的能量只有一半转换为电场能量存储于C中，另一半在充电过程中被R消耗掉。不论RC的值是多少，充电效率总是50%。

2. *RL*电路的零状态响应



(1) 激励是恒定直流

换路前： $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

换路后： $i_R + i_L = I_S$

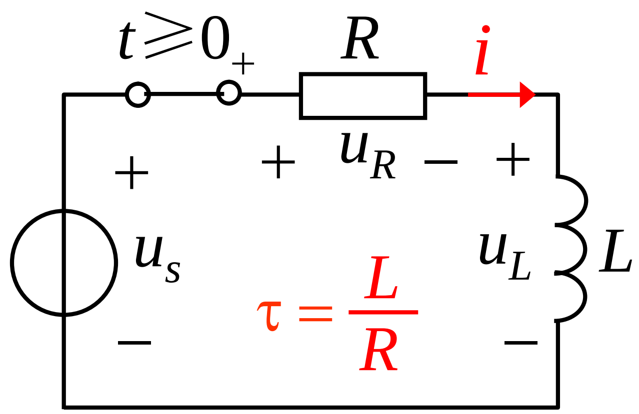
代入 $i_R = \dfrac{u_L}{R} = \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = I_S$$

解得： $i_L = I_S(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$

式中： $\tau = \dfrac{L}{R}$

(2)激励是正弦电压



设 $u_s = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$

则 $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$

通解： $i''_L = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

特解的形式： $i'_L = I_m \cos(\omega t + \theta)$ I_m、θ 为待定系数。

把 i'_L 代入微分方程：

$$RI_m \cos(\omega t + \theta) - \omega L I_m \sin(\omega t + \theta) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$\downarrow$$

$$I_m |Z| \cos(\omega t + \theta + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

式中 $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$

$$I_m|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$$

式中 $|Z|=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$ $\quad \mathrm{tg}\varphi=\dfrac{\omega L}{R}$

比较得： $\theta=\psi_u-\varphi$， $\quad I_m=\dfrac{U_m}{|Z|}$

特解：$i'_L=I_m\cos(\omega t+\theta)=\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\psi_u-\varphi)$

上述常系数非齐次线性微分方程的全解为：

$$i_L=\frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\psi_u-\varphi)+A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

由$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$定出： $A=-\dfrac{U_m}{|Z|}\cos(\psi_u-\varphi)$

$$i_L=\frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\psi_u-\varphi)-\frac{U_m}{|Z|}\cos(\psi_u-\varphi)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L = \frac{U_m}{|Z|}\cos(\omega t+\psi_u-\varphi) - \frac{U_m}{|Z|}\cos(\psi_u-\varphi)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

稳态分量i'_L是与外施激励同频率的正弦量

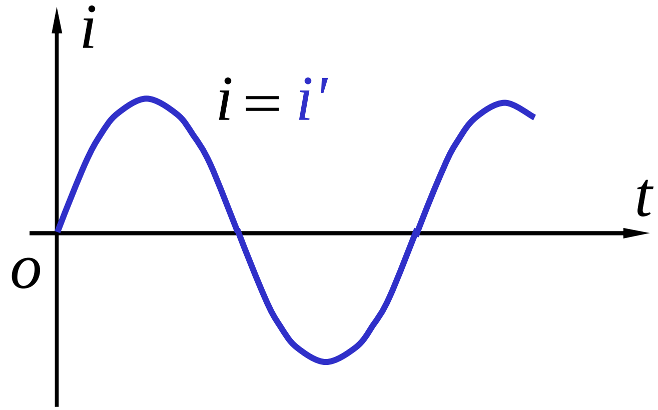
暂态分量i''_L随时间的增长衰减为零。

R上的电压 $u_R = R\, i_L$ L上的电压 $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

讨论

(1)若 S闭合时$\psi_u-\varphi=\pm 90^{\circ}$，

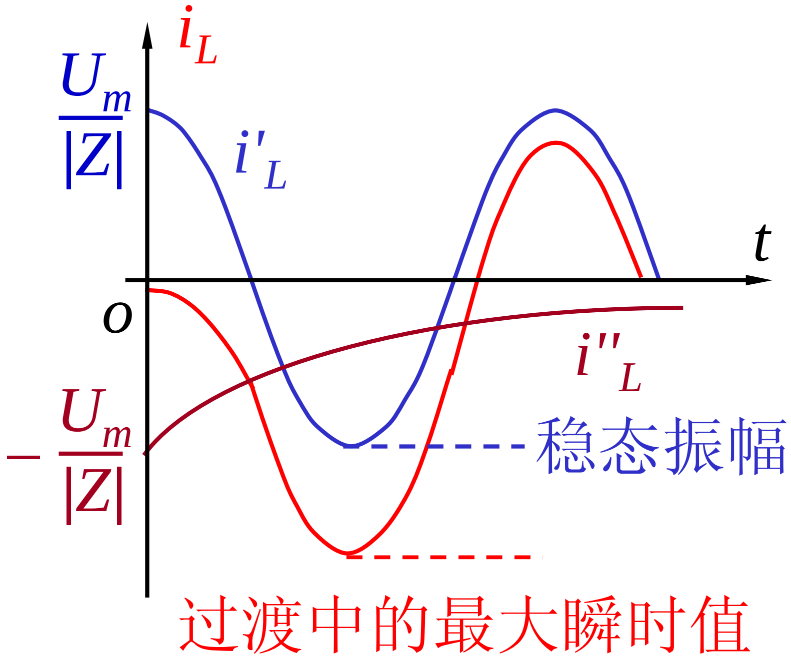
则 $i''_L=0$。说明电路不发生过渡过程而立即进入稳态。



(2)若S闭合时$\psi_u=\varphi$，则：$i_L = \dfrac{U_m}{|Z|}\cos\omega t - \dfrac{U_m}{|Z|}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L = \frac{U_m}{|Z|}\cos\omega t - \frac{U_m}{|Z|}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

当τ很大时，i''_L衰减极其缓慢。

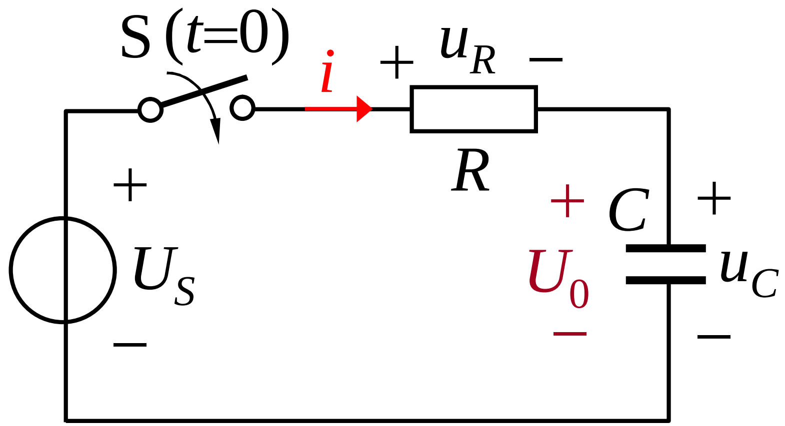


- 此时闭合 S，约过半个周期，i_L的最大瞬时值(绝对值) 将接近稳态振幅的两倍。

- *RL* 串联电路与正弦电压接通后，在一定初值条件下，电路的过渡过程与S动作时刻有关。

§ 7-4 一阶电路的全响应

1. 全响应：外施激励和动态元件初值都不为零时的响应。



$$\left.\begin{aligned} RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0 \end{aligned}\right\}$$

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

全响应 = 稳态解 + 暂态解

强制分量　自由分量

2. 全响应的两种分解方式

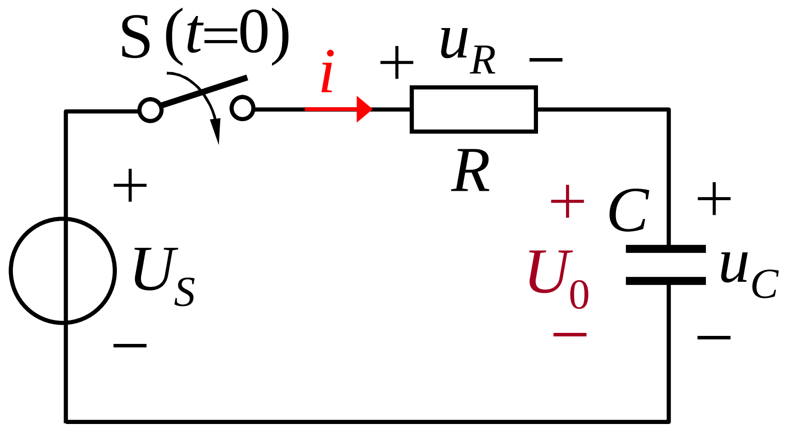
(1)一阶电路的全响应可以看成是稳态分量(强制分量) 与暂态分量(自由分量) 之和。

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

(2)把上式改写成下列形式：

$$u_C = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_S(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应



此种分解方式便于叠加计算，体现了线性电路的叠加性质。

3. 三要素法

全响应 = 稳态分量 + 暂态分量

$u_C = U_S + (U_0 - U_S)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ 说明一阶电路的响应

由初始值、稳态值和时间常数三个要素决定。

(1) 在恒定激励下 $f(t) = f(\infty) + [\,f(0_+) - f(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

(2) 在正弦电源激励下 $f(t) = f_\infty(t) + [\,f(0_+) - f_\infty(0_+)\,]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

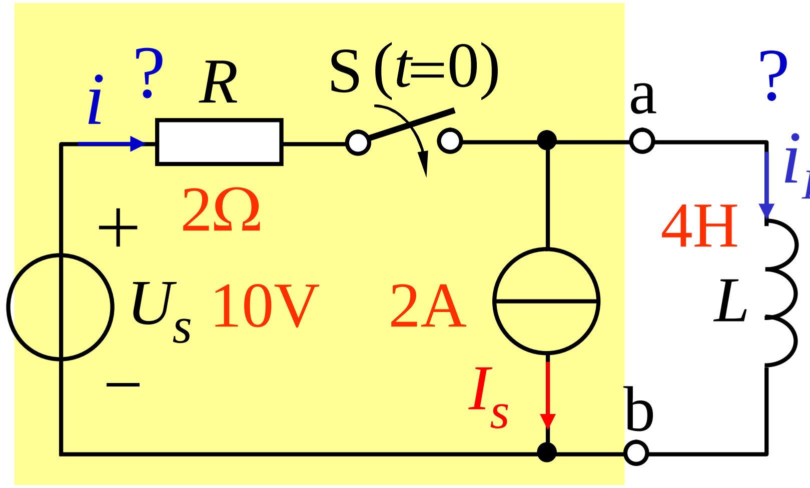
$f_\infty(t)$是换路后的稳态响应(特解)，是与激励同频率的正弦量；求$f_\infty(t)$的方法是待定系数法或相量法。

$f_\infty(0_+)$是稳态响应$f_\infty(t)$的初始值。

$f(0_+)$和τ的含义与恒定激励下相同。

4. 解题指导　例1

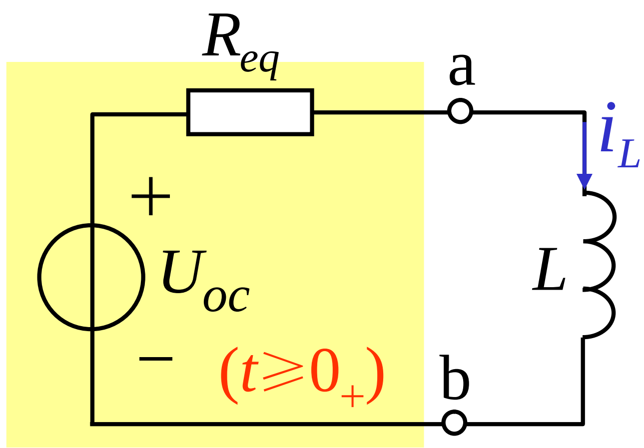
换路前：$i_L(0_-)= -I_S= -2\text{A}$



求换路后的戴维宁电路

$U_{oc}=U_s-Ri_s=10-2\times2=6\text{ V}$

$R_{eq}=R=2\Omega$



求i_L的三个要素：

$i_L(0_+)=i_L(0_-)=-2\text{A}$

$i_L(\infty)=U_{oc}/R_{eq}=6/2=3\text{ (A)}$

$\tau=L/R_{eq}=4/2=2\text{ (s)}$

$i_L(t)=3+[-2-3]e^{-\frac{t}{2}} \longrightarrow i_L(t)=3-5e^{-0.5t}\text{ A}$

$i(t)=I_S+i_L(t)=5-5e^{-0.5t}\text{ A}$

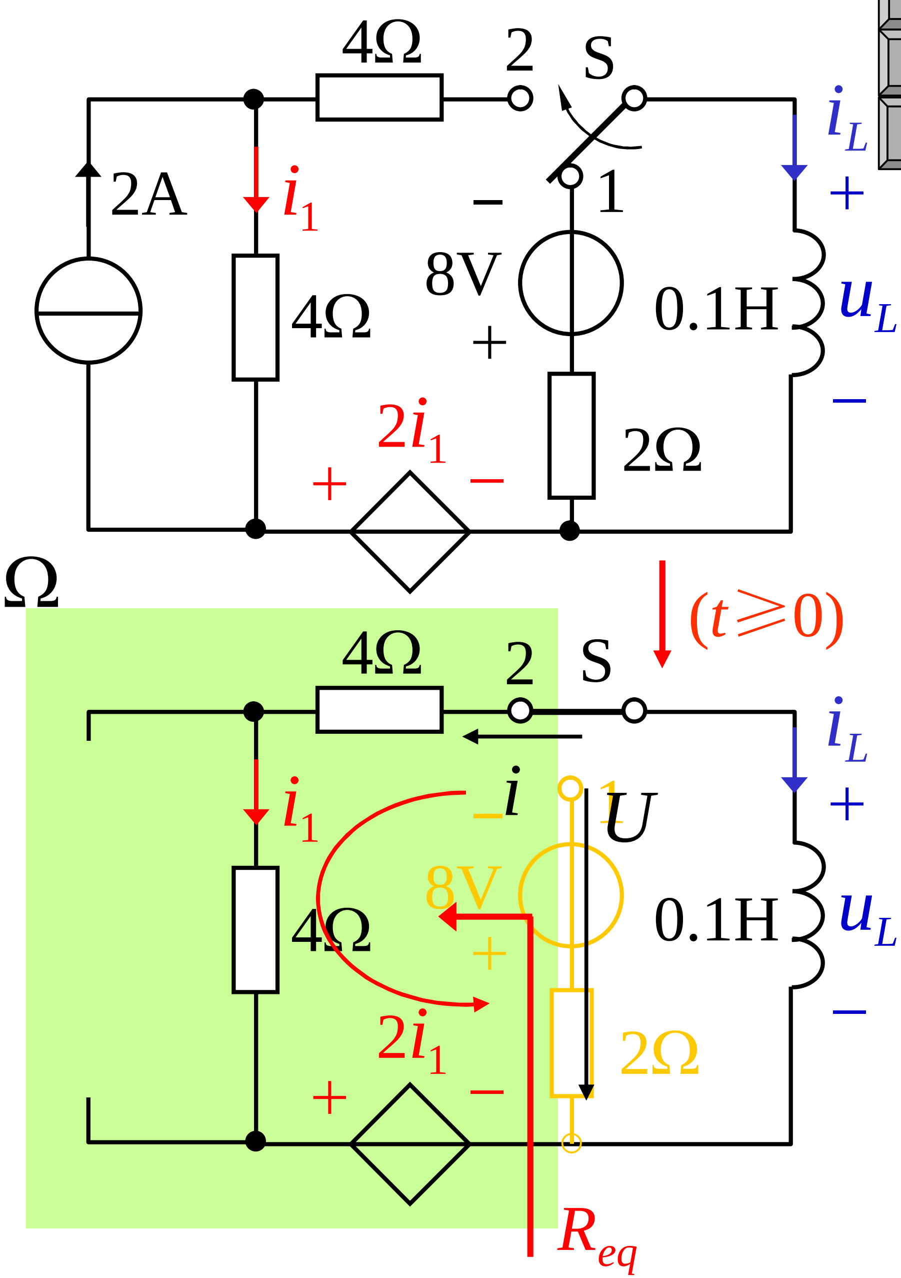
例2：电路如图，求u_L。

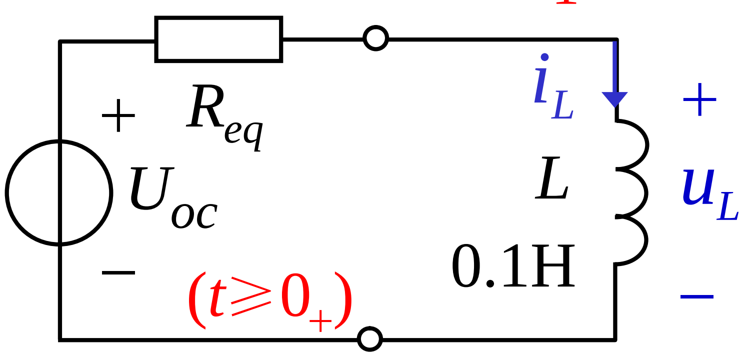
解：$i_L(0_-)=-4A=i_L(0_+)$

求换路后的戴维宁电路

$U_{oc}=4i_1+2i_1=12V$

$R_{eq}=\dfrac{U}{i}=\dfrac{(4+4)i_1+2i_1}{i_1}=10\Omega$





$u_L(0_+)=U_{oc}-R_{eq}\,i_L(0_+)$

$=12-10\times(-4)=52V$

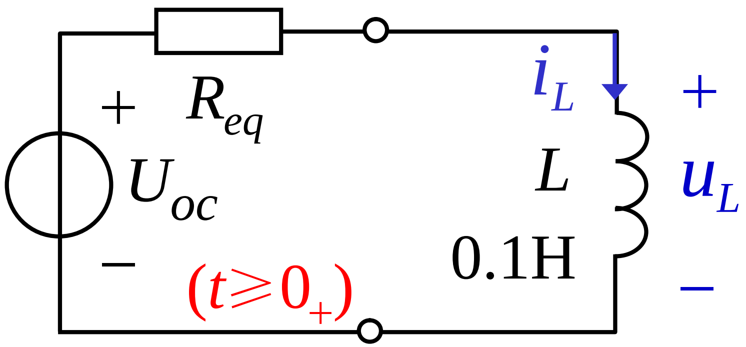
例2：电路如图，求u_L。

解：$i_L(0_-) = -4\text{A} = i_L(0_+)$

求换路后的戴维宁电路

$U_{oc} = 4i_1 + 2i_1 = 12\text{V}$

$R_{eq} = \dfrac{U}{i} = 10\Omega$



$u_L(0_+) = U_{oc} - R_{eq}\, i_L(0_+)$

$= 52\text{V}$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.1}{10} = 0.01\text{s}$$

$u_L(\infty) = 0$

代入三要素公式

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

得 $u_L = 52\mathrm{e}^{-100t}$ V

也可以先求i_L：

$i_L(0_-) = -4\text{A} = i_L(0_+)$

$i_L(\infty) = U_{oc} / R_{eq} = 1.2\text{A}$

$\tau = 0.01\text{s}$

$i_L = 1.2 - 5.2\mathrm{e}^{-100t}$ A

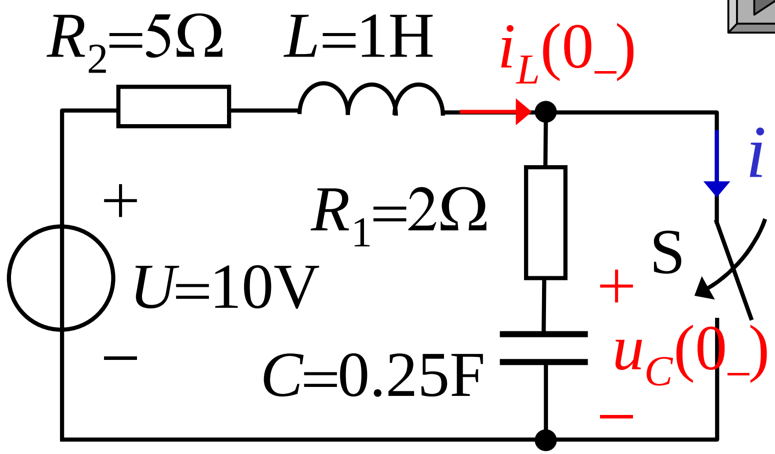
再由 $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ 求出u_L。

例3：图示电路原本处于稳定状态，t=0 时开关S闭合，求换路后的电流$i(t)$ 。解：

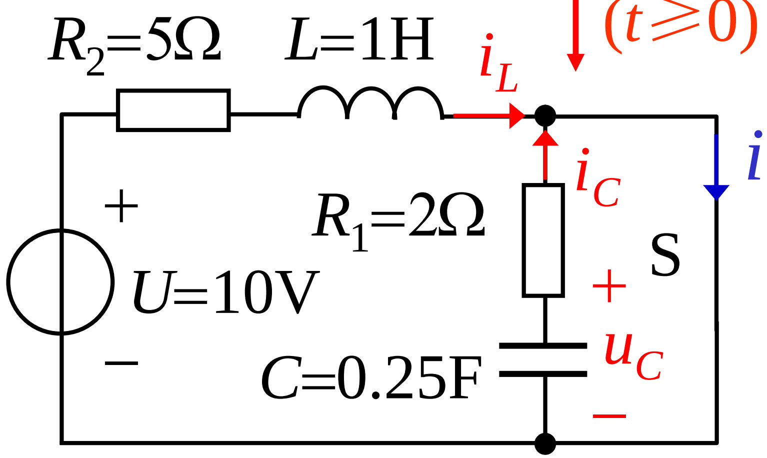
S闭合前C开路L短路

$i_L(0_-)=0$， $u_C(0_-)=10\text{V}$，

换路后变为两个独立的单回路



(t≥0)



电容电路的三要素为

$$i_C(0_+)=u_C(0_+)/R_1=5\text{A}$$

$$\tau_1=R_1C=0.5\text{s}\ ,\quad i_C(\infty)=0$$

电感电路的三要素为

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

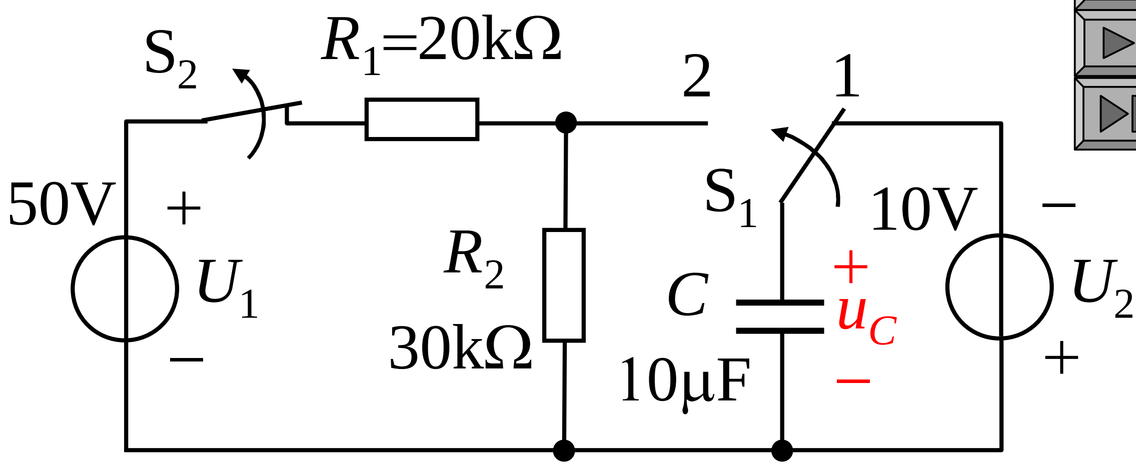
$$\tau_2=L/R_2=0.2\text{s}\ ,$$

$$i_L(\infty)=U/R_2=10/5=2\text{A}$$

求出$i_C(t)$、$i_L(t)$ 后

$$i(t)=i_L(t)+i_C(t)$$

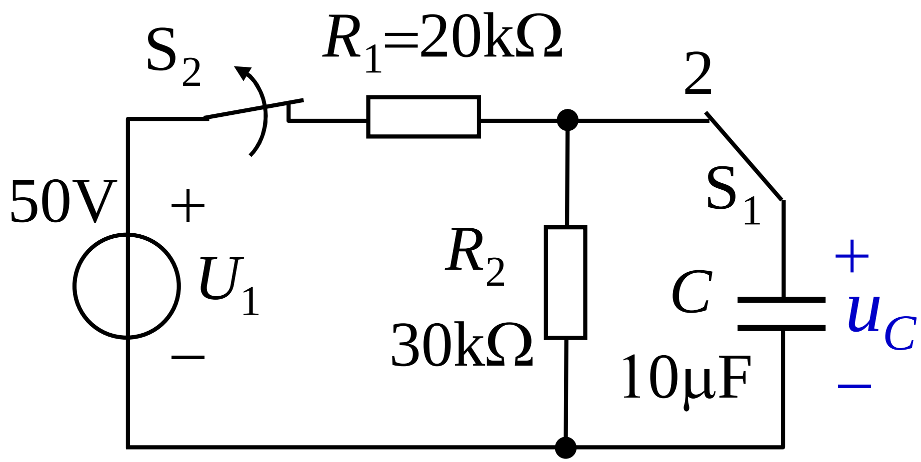
例4：电路如图。t=0时S_1从位置1拨向位置2，经0.12s后S_2打开，求$u_C(t)$并绘波形图。



解：

先求初始值 $u_C(0_-) = -10\text{V}$

再分阶段用三要素法求解。



(1) $0 \leqslant t < 0.12\text{s}$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -10\text{V}$$

$$u_C(\infty) = \frac{30}{30+20} \times 50 = 30\text{V}$$

$$\tau_1 = (20//30) \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = 0.12\text{s}$$

$$u_C(t) = 30 - 40e^{-8.33t}\ \text{V} \qquad (0 \leqslant t < 0.12\text{s})$$

$$u_C(t)=30-40e^{-8.33t}\ \text{V}\quad (0\leqslant t<0.12\text{s})$$

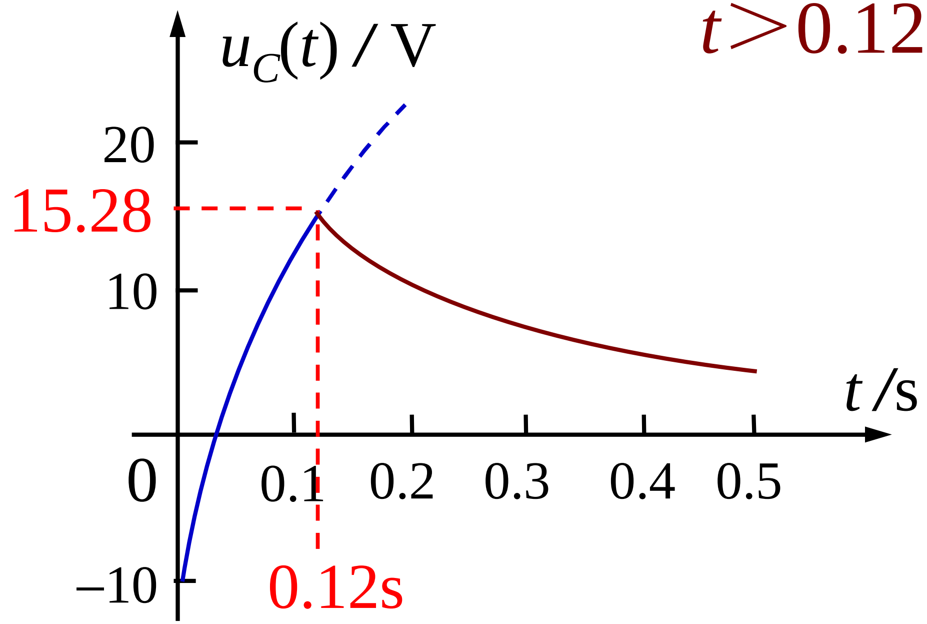
$$u_C(0.12_-)=30-40e^{-8.33\times 0.12}=15.28\text{V}$$

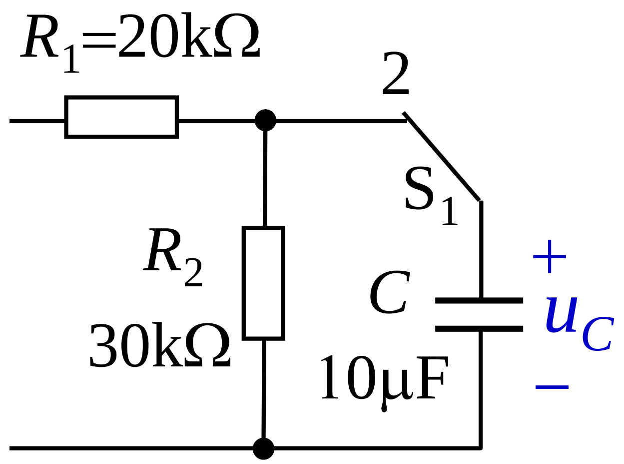
(2) $t>0.12\text{s}$ $\quad u_C(0.12_+)=u_C(0.12_-)=15.28\text{V}$

$$\tau_2=R_2C=30\times 10^3\times 10\times 10^{-6}=0.3\text{s},\quad u_C(\infty)=0$$

$$u_C(t)=15.28e^{-3.33(t-0.12)}\ \text{V}$$

$t>0.12\text{s}$



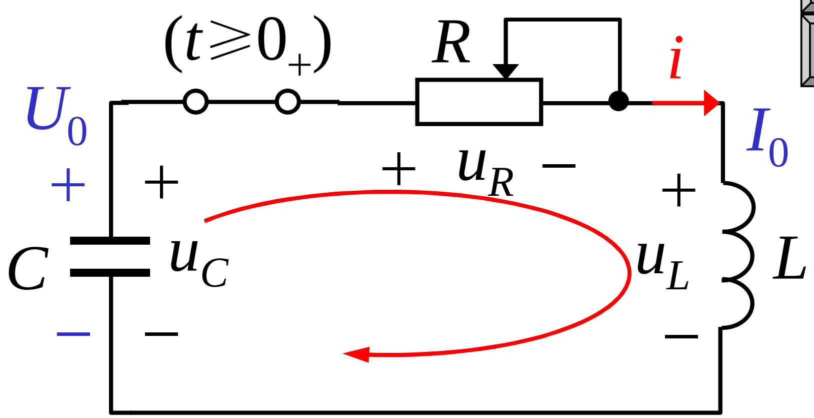


§7－5 二阶电路的零输入响应

- 二阶电路的动态分析，原则上与一阶电路相似，那就是列方程、解方程。
- 由于二阶线性微分方程有两个特征根，对于不同的二阶电路，它们可能是实数、虚数或共轭复数。因此动态过程将呈现不同的变化规律。
- 分析时由特征方程求出特征根，并判断电路是处于衰减放电，还是振荡放电，还是临界放电状态。

典型电路分析（*RLC*串联）

1. 列写方程



由KVL： $-u_C + Ri + u_L = 0$

若以电容电压为变量则有

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad Ri = -RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$$

代入上式得二阶齐次微分方程

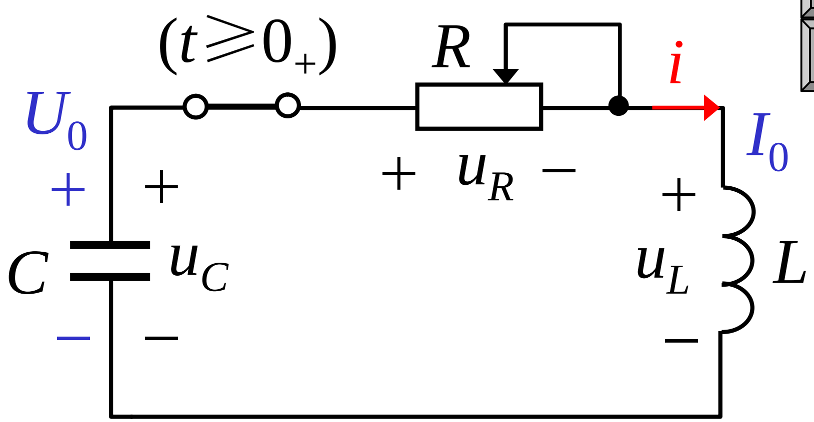
$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

初始条件为

$u_C(0_+) = U_0$， $i(0_+) = 0$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = -\frac{i(0_+)}{C} = 0$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

$$u_C(0_+)=U_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0$$



2. 解方程

特征方程　$LCp^2+RCp+1=0$

特征方程的根

$$p_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$p_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

(1)特征根只与电路参数和结构有关，与激励和初始值无关。

(2)当R、L、C的参数不同时，特征根有不同的形式。

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \qquad p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$u_C(0_+)=U_0, \quad \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+}=0$$

3.分析三种情况

(1) $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ p_1、p_2是两个不相等的负实根。

解的形式为 $u_C=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$

由初始条件求得 $A_1=\frac{p_2U_0}{p_2-p_1}$ $A_2=\frac{p_1U_0}{p_2-p_1}$

所以 $u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t})$

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

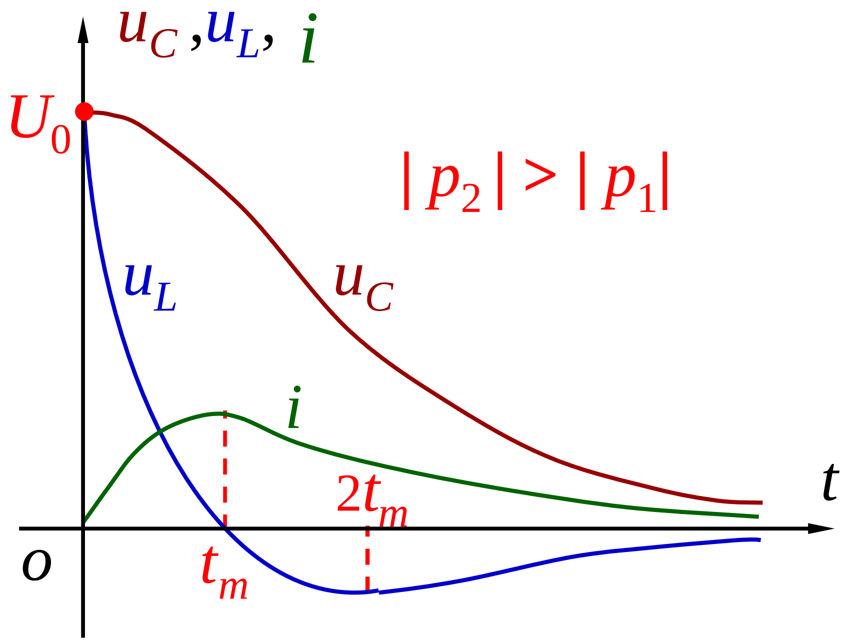
考虑到 $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$

$$i = -C\frac{du_C}{dt}$$

$$= -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$= -\frac{U_0}{(p_2 - p_1)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$



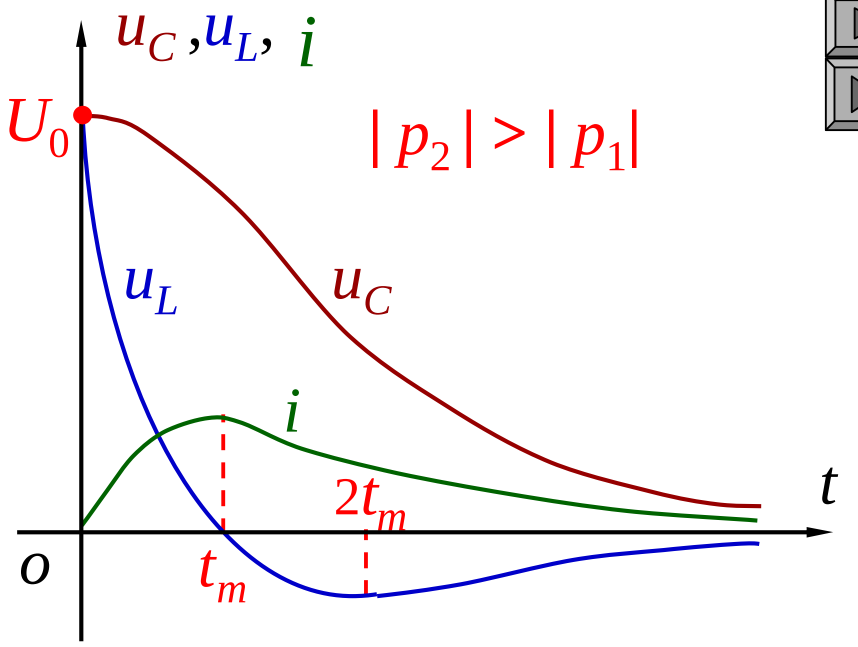
u_C 第1项较大，且衰减较慢。故占主导地位。

分析

①总有$u_C \geqslant 0$、$i \geqslant 0$，说明C一直在释放电能。称非振荡放电或过阻尼放电。

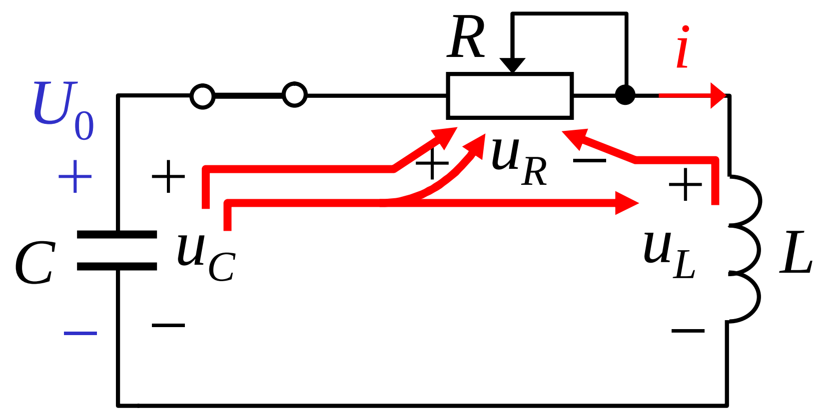
② i从0开始，到0结束，有极值。令 $(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t) = 0$ 得i达到 $i_{\max}$的时刻为：

$$t_m = \frac{\ln(p_2 / p_1)}{p_1 - p_2}$$



③ 0～t_m：C 的电场能转化为L的磁场能和R的热能。

④ t_m～∞：u_L变负，C 的电场能和L的磁场能都转化为R的热能。



能量释放完毕，过渡过程结束。

(2) $R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

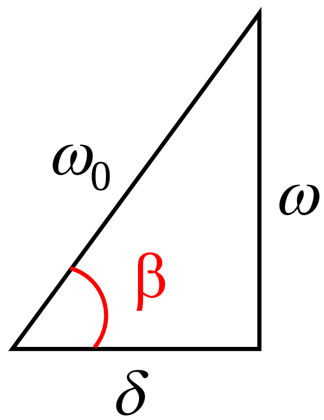
令 $\delta=\dfrac{R}{2L}$ $\omega^2=\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2$ 则 $p_1=-\delta+\mathrm{j}\omega$， $p_2=-\delta-\mathrm{j}\omega$

特征方程有一对共扼复根，其解的形式为：

$$u_C=\mathrm{e}^{-\delta t}(A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t)$$ 或 $$u_C=\mathrm{e}^{-\delta t}B\sin(\omega t+\beta)$$

由初始条件
$$\begin{cases} u_C(0_+)=U_0 & \rightarrow B\sin\beta=U_0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0 & \rightarrow B(-\delta)\sin\beta+B\omega\cos\beta=0 \end{cases}$$

解得 $B=\dfrac{U_0}{\sin\beta}$ $\underline{\underline{\beta=\mathrm{arctg}\dfrac{\omega}{\delta}}}$ $\underline{\underline{B=\dfrac{\omega_0}{\omega}U_0}}$



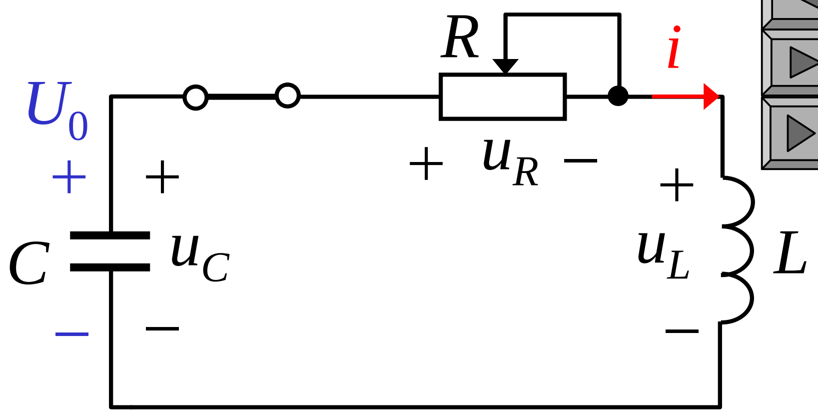
令 $\sqrt{\delta^2+\omega^2}=\omega_0$

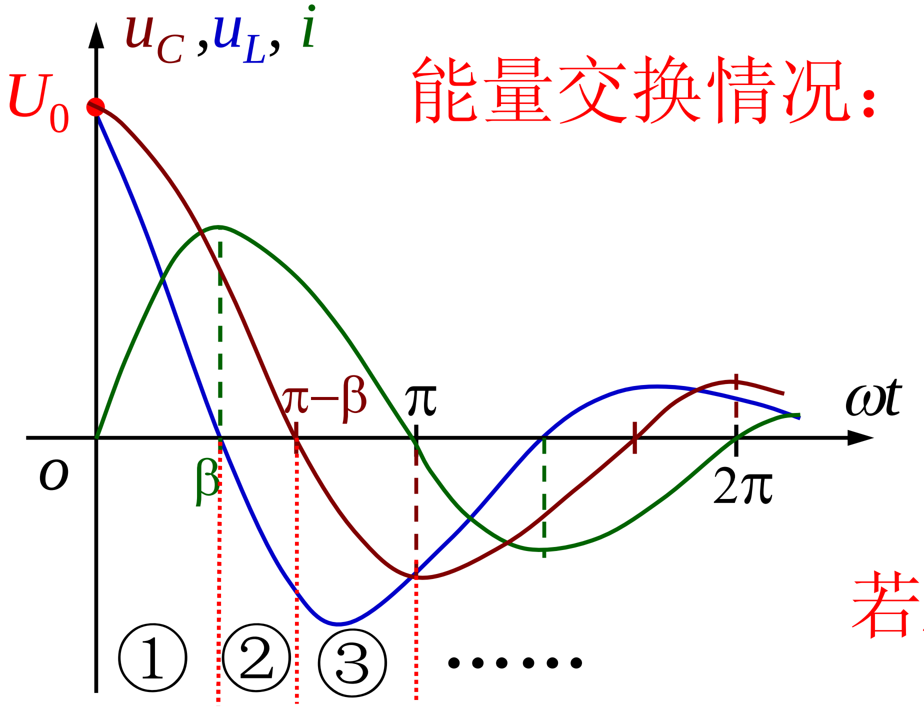
则 δ、ω、ω_0、 β 构成一直角三角形。

$$u_C = \frac{U_0\omega_0}{\omega} e^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$$

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t}\sin\omega t$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_0\omega_0}{\omega} e^{-\delta t}\sin(\omega t-\beta)$$





能量交换情况：

① C 释放，L和R吸收。

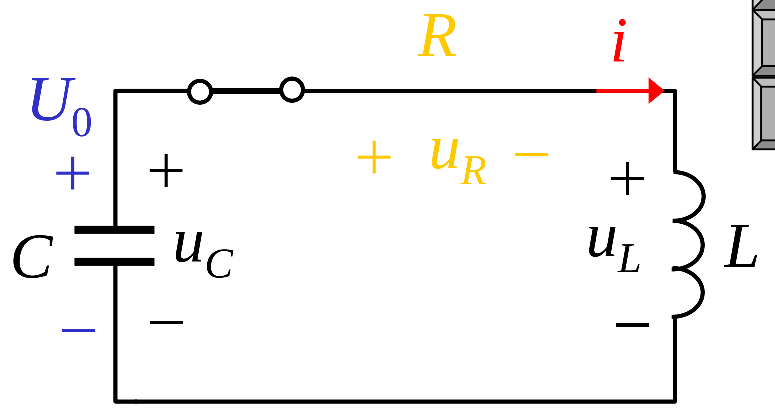
② C和L 释放，R吸收。

③ L 释放，C和R吸收。

$R\neq 0$，振荡是衰减的。

若R=0，则振荡是等幅的。

若 $R=0$ 则 $\delta=\dfrac{R}{2L}=0$



$$\omega=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$$

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\delta}=90^{\mathrm{o}}$$

$$u_C=\frac{U_0\omega_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)=U_0\sin(\omega_0 t+90^{\mathrm{o}})$$

$$i=\frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t=\frac{U_0}{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}\sin\omega_0 t$$

$$u_L=u_C$$

- 放电过程中无损耗，所以振荡是等幅的。
- 实际电路总是有损耗的，当我们只关心在很短范围发生的过程时，按等幅振荡处理不会引起太大的误差。

P161 例7−7为RLC放电电路，已知：U_0=15kV，C=1700μF，$L=6\times10^{-9}$H，$R=6\times10^{-4}\Omega$。试求：

$i(t)$ =? 何时$i=i_{max}$? i_{max}=?

➢ 本例说明：利用*RLC*，可以获得强大的脉冲电流。

解：根据已知条件有

$$\delta=\frac{R}{2L}=\frac{6\times10^{-4}}{2\times6\times10^{-9}}$$

$$=5\times10^{4}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$=3.09\times10^{5}\ \mathrm{rad/s}$$

属于振荡放电情况。

$$i=\frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t$$

$$=8.09\times10^{6}\mathrm{e}^{-50000t}\times\sin(3.09\times10^{5})t\ \mathrm{A}$$

$$\beta=\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\delta}=1.41\ \mathrm{rad}$$ 代入

得 $t=t_m=\dfrac{\beta}{\omega}=4.56\ (\mu\mathrm{s})$ 时

$$i=6.36\times10^{6}\ \mathrm{A}=i_{max}$$

(3) 临界情况 $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ $\qquad p_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}$

$p_1=p_2=-\dfrac{R}{2L}=-\delta$ 特征方程具有重根。

微分方程解的形式为： $u_C=(A_1+A_2t\,)\,\mathrm{e}^{-\delta t}$

根据初始条件

$u_C(0_+)=U_0 \qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0$ 求得 $A_1=U_0$ $A_2=\delta\,U_0$

$u_C=U_0\,(1+\delta\,t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}$

$i=\dfrac{U_0}{L}t\,\mathrm{e}^{-\delta t}$

$u_L=U_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}(1-\delta\,t)$

放电过程具有非振荡性质，是振荡和非振荡过程的分界线，这种情况下的R称为临界电阻。

R >临界电阻,为过阻尼电路。

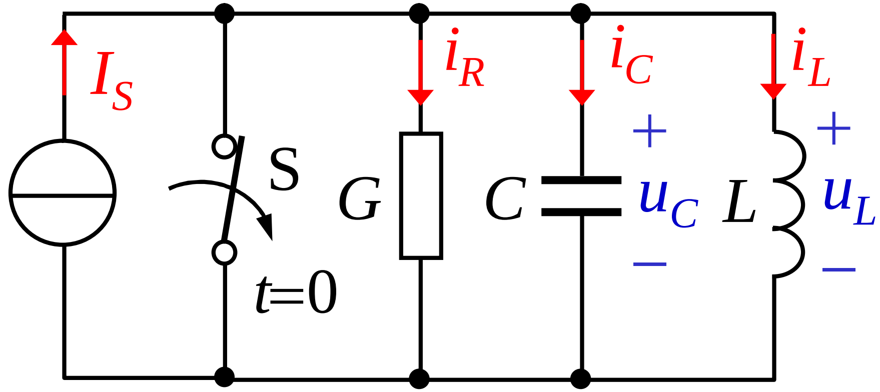
R <临界电阻,为欠阻尼电路。

§ 7-6 二阶电路的零状态响应和全响应

若以电感电流为变量则有

$$i_R = Gu_L = GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$



$u_C(0_-) = 0$，$i_L(0_-) = 0$

由KCL $\quad LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = I_S$

求解方程的过程同7−5(通解)和7−3(特解)。

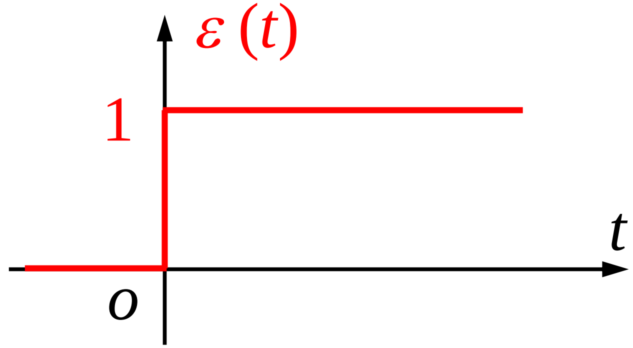
全解 = 通解 + 特解

二阶电路的全响应也=零状态响应+零输入响应。

§ 7−7 一阶电路和二阶电路的阶跃响应

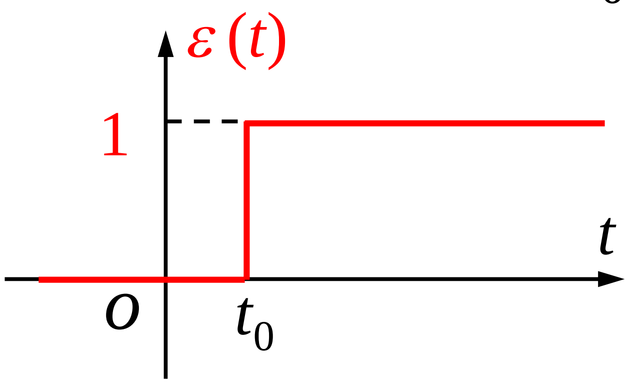
1. 单位阶跃函数

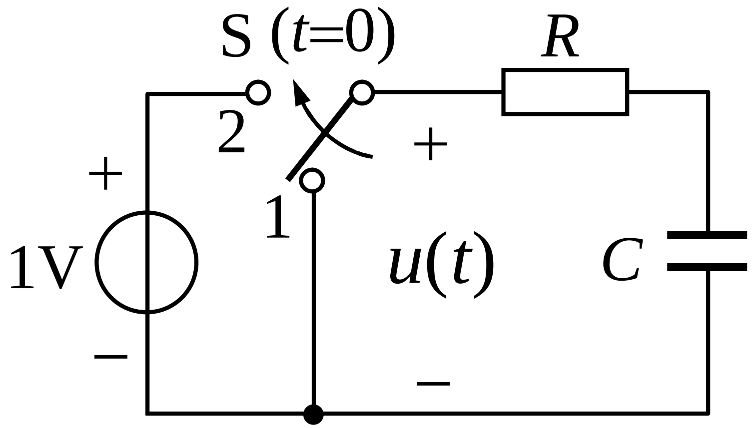
(1) 定义 $\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0_-\\ 1 & t\geqslant 0_+\end{cases}$



(2) 延迟的单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\leqslant t_{0-}\\ 1 & t\geqslant t_{0+}\end{cases}$$



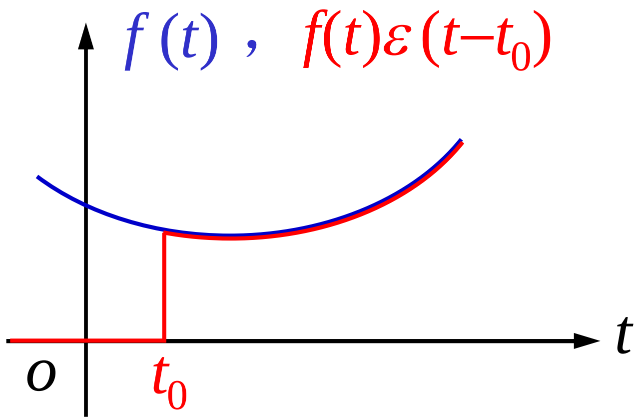


①奇异函数，在 t=0 时发生了阶跃；②开关的数学模型，也称为开关函数。

2. 阶跃函数的性质

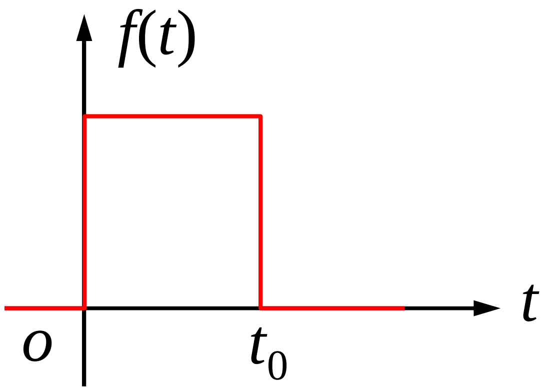
(1) 用来起始任意一个函数

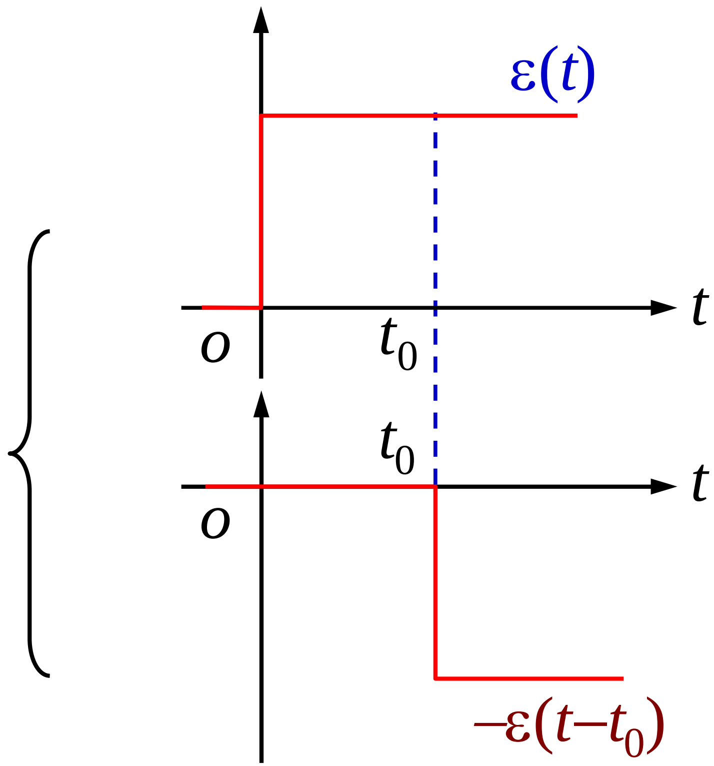
$$f(t)\,\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\leqslant t_{0-}\\ f(t) & t\geqslant t_{0+}\end{cases}$$



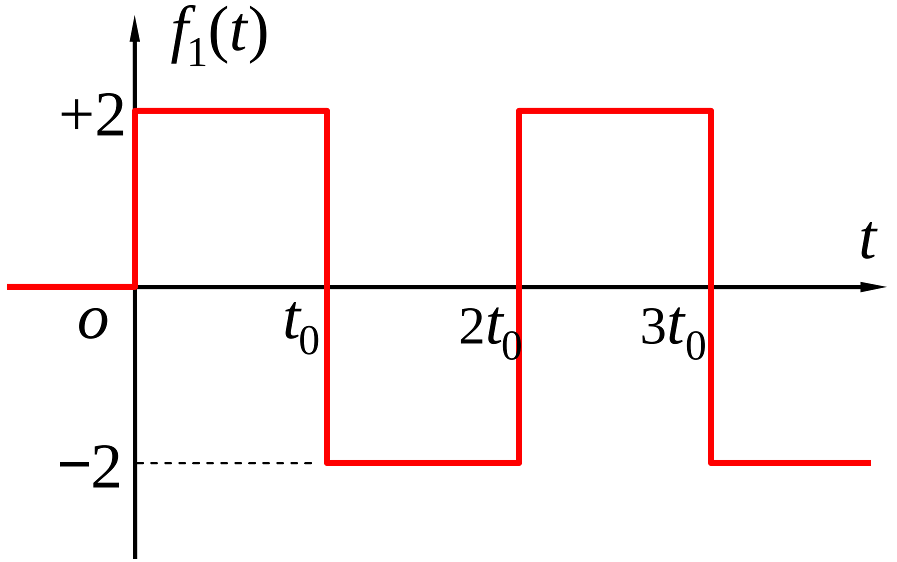
(2) 合成矩形脉冲

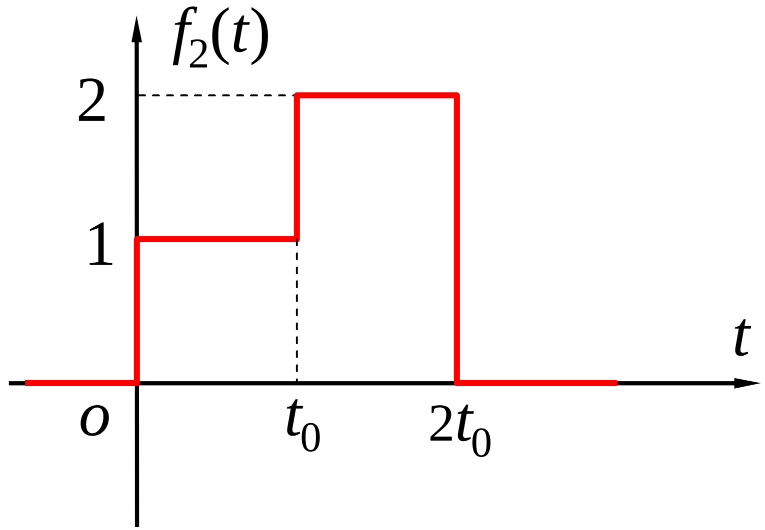
$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$





例：用阶跃函数表示下列波形





$$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 4\varepsilon(t-t_0) + 4\varepsilon(t-2t_0) - 4\varepsilon(t-3t_0) + \cdots$$

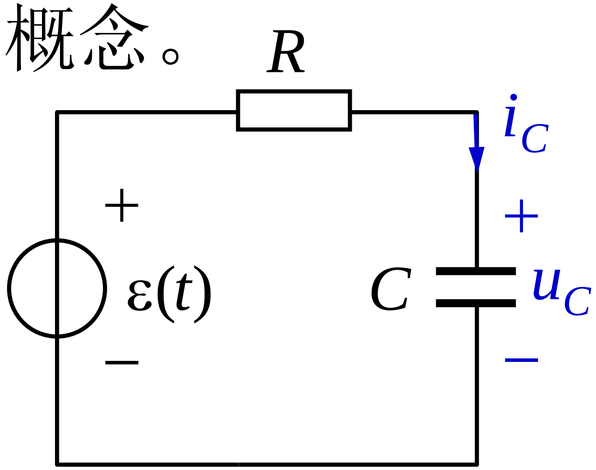
$$f_2(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-t_0) - 2\varepsilon(t-2t_0)$$

分段常量信号可以表示成一系列阶跃信号之和。

3. 阶跃响应

单位阶跃输入的零状态响应称为电路的单位阶跃响应，记作$s(t)$。通过例题说明一些概念。

例1：求 $u_C(t)$、$i_C(t)$。 解：



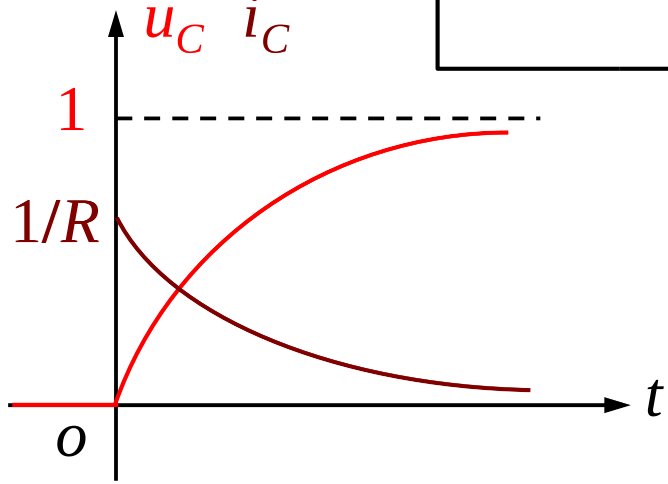
根据阶跃函数的性质得

$u_C(0_-)=0$， $u_C(\infty)=1\text{V}$

单位阶跃响应为

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,\varepsilon(t)\ \ \text{V}$$

$$i_C = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\,\varepsilon(t)\ \ \text{A}$$

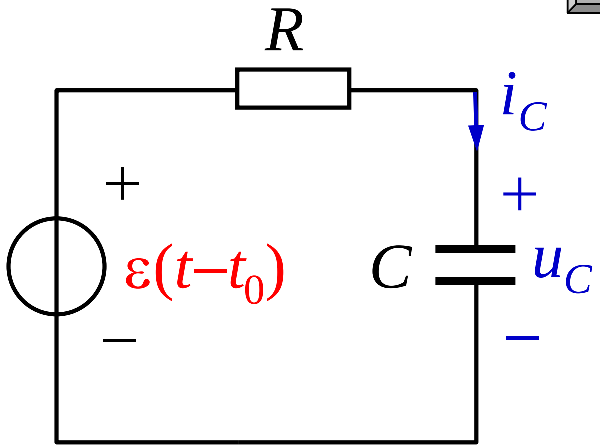


注意

$f(t)=e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$ 初值为零。 $f(t)=e^{-\frac{t}{\tau}}$ $t\geqslant 0$ 初值可以不为零。

若激励在$t = t_0$时加入，则响应从$t = t_0$开始。

延迟的阶跃响应为



$$u_C = (1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\,\varepsilon(t-t_0)\ \text{V}$$

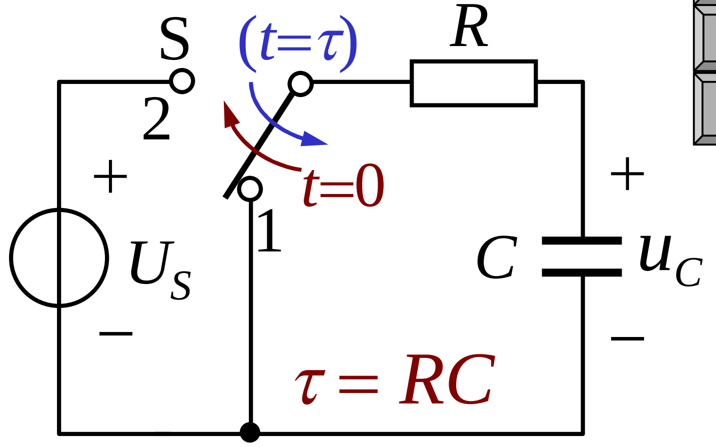
$$i_C = \frac{1}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\,\varepsilon(t-t_0)\ \text{A}$$

注意：　延迟的阶跃响应不要写为

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,\varepsilon(t-t_0)\ \text{V}$$

阶跃响应的求法与恒定激励下的零状态响应的求法本质相同。用$f(t)\,\varepsilon(t-t_0)$表示。

例2：S在位置1时电路处于稳态。t=0时S由位置1合向位置2，在$t=\tau$ 时，S又从位置2 合向位置1。求$t \geqslant 0$时的u_C 。



解法1：把电路的工作过程分段求解

(1) $0 \leqslant t \leqslant \tau$ ： 为典型RC串联电路的零状态响应。

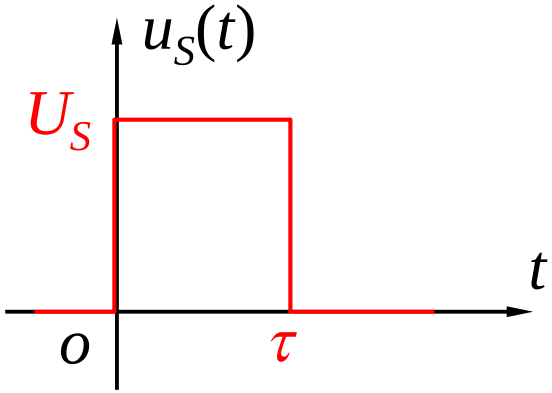
$$u_C = U_S (1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

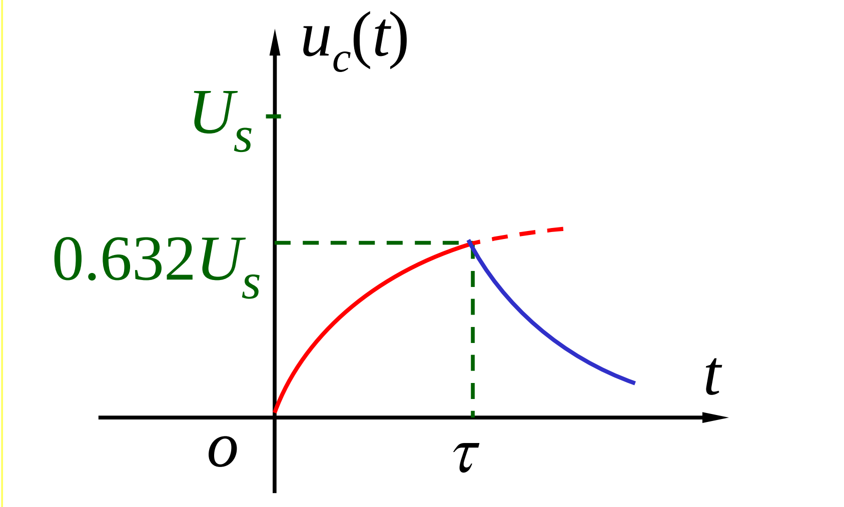
(2) $\tau \leqslant t < \infty$： 为典型RC串联电路的零输入响应。

初始值： $u_C(\tau_+) = u_C(\tau_-) = U_S (1- e^{-1}) = 0.632 U_S$

$$u_C = 0.632 U_S\, e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} \qquad \tau \leqslant t < \infty$$

解法2：用阶跃函数表示激励，求阶跃响应。





$$u_S(t) = U_S\,\varepsilon(t) - U_S\,\varepsilon(t-\tau)$$

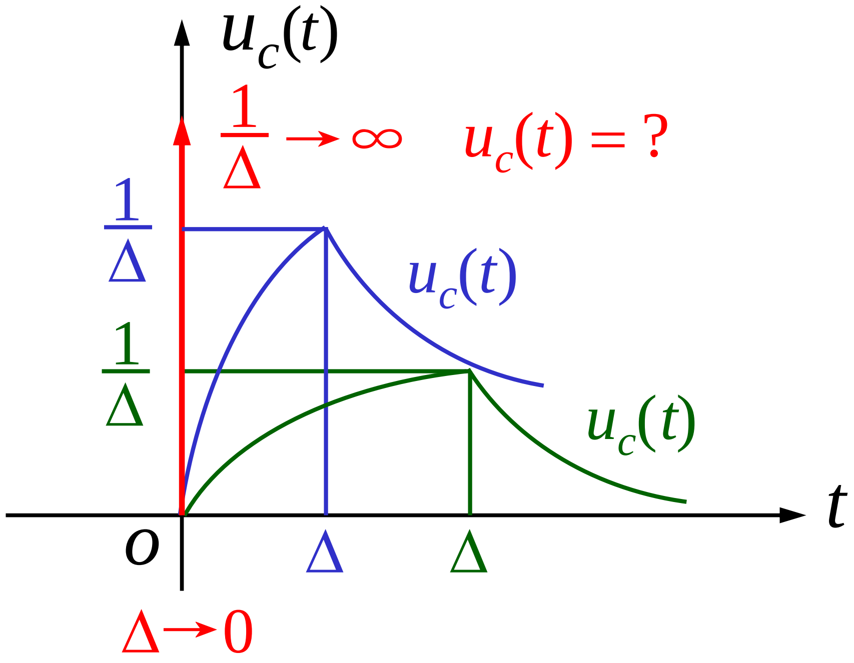
RC电路的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1-e^{-\frac{t}{\tau}})\,\varepsilon(t) \qquad s(t-\tau) = (1-e^{-\frac{t-\tau}{\tau}})\,\varepsilon(t-\tau)$$

利用线性电路的叠加性质可得

$$u_C(t) = U_S\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\,\varepsilon(t) + U_S\,(1-e^{-\frac{t-\tau}{\tau}})\,\varepsilon(t-\tau)$$

阶跃响应　　　　延迟的阶跃响应

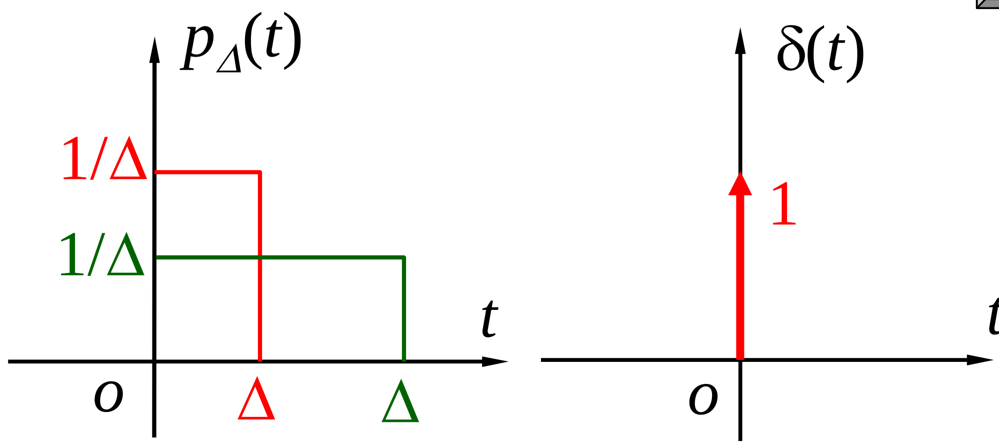

$u_c(t)$
$\frac{1}{\Delta} \to \infty$
$u_c(t) = ?$
$\frac{1}{\Delta}$
$u_c(t)$
$\frac{1}{\Delta}$
$u_c(t)$
t
o
Δ
Δ
$\Delta \to 0$

§ 7-8 一阶电路和二阶电路的冲击响应

1. 冲击函数的定义

(1)单位冲击函数

$$\begin{cases} \delta(t)=0, & t>0_+ \text{和} t<0_- \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$



$$\lim_{\Delta\to 0} p_\Delta(t)=\delta(t)$$

由于$t>0_+$和$t<0_-$时$\delta(t)=0$，所以：$\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$

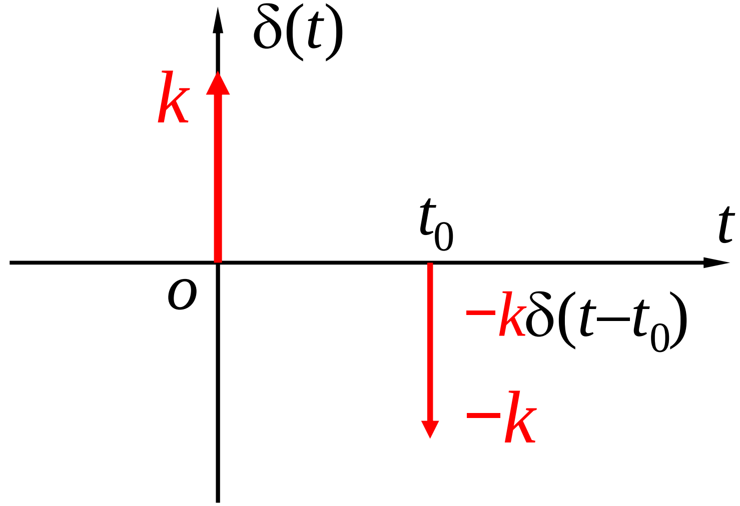
(2)延时的单位冲击函数

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0, & t>t_{0+} \text{和} t<t_{0-} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

(3)冲击强度

定义中的积分值称为冲击强度。

$k\delta(t)$的冲击强度为k。



2. 冲击函数的性质

(1) $\delta(t)$ 与 $\varepsilon(t)$的关系

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x$$

(2)“筛分”性质

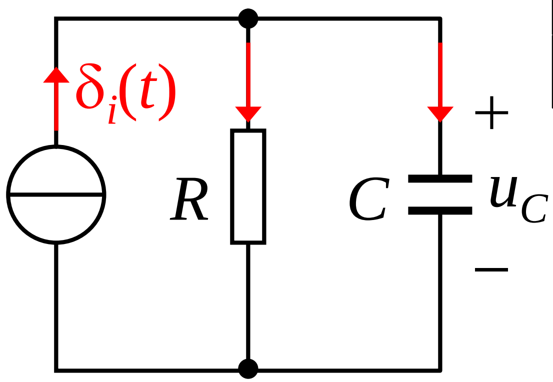
$$f(t)\,\delta(t-t_0)=f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_0)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=f(t_0)$$

把t_0时刻的函数值“筛”出来，也称取样性质。

3. 冲击响应的分析

电路在单位冲击函数激励下的零状态响应称为冲击响应。记作$h(t)$。



在冲击电流激励下的RC并联电路

(1) 分析过程

① 列$t \geqslant 0_$时电路的微分方程；

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta_i(t) \qquad u_C(0_-)=0$$

② 对上式取积分求$u_C(0_+)$；

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t)\,\mathrm{d}t$$

因u_C是有限值，故此项积分为0。

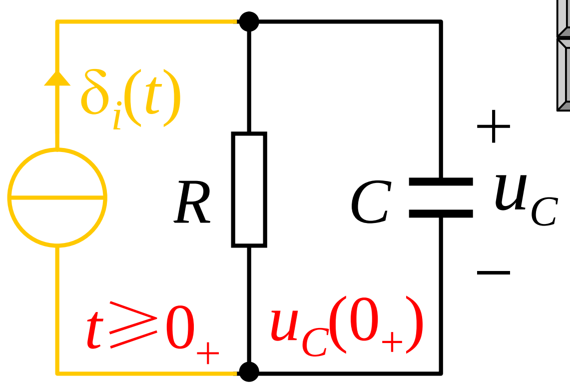
根据$\delta_i(t)$的定义，故此项积分为1。

$$C\,[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1$$

$$u_C(0_+)=\frac{1}{C}+u_C(0_-)$$

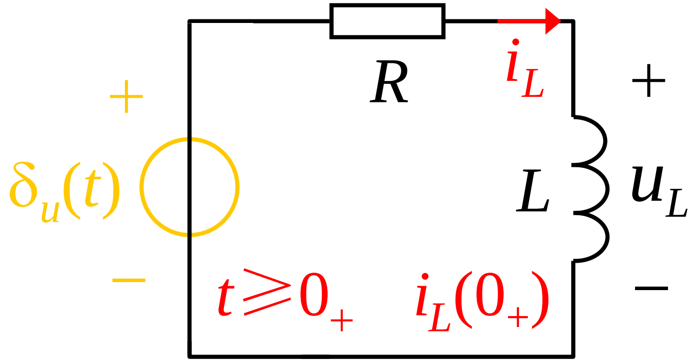
(3) $t \geqslant 0_+$时，$\delta_i(t) = 0$。

方程 $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{R} = \delta_i(t)$



变为 $\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{R} = 0 \\ u_C(0_+) = \dfrac{1}{C} + u_C(0_-) \end{cases}$

已变成了零输入响应的求解问题($t \geqslant 0_+$)。



➢ 用同样的方法，可求得RL串联电路在单位冲击电压作用下的响应。

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0 \\ i_L(0_+) = \dfrac{1}{L} + i_L(0_-) \end{cases}$$

综上，冲击响应分两个过程：

过程1： t 从 $0_- \to 0_+$

$u_C(t)$从$u_C(0_-) \to u_C(0_+)$

$i_L(t)$ 从$i_L(0_-) \to i_L(0_+)$

建立初始值的过程。

u_C或i_L 产生跃变，已不满足换路定则。

过程2： t 从 $0_+ \to \infty$

$\delta(t)$已不起作用。

第1个过程中留下的能量开始释放。这是以$u_C(0_+)$[或 $i_L(0_+)$] 为初始值的零输入响应。

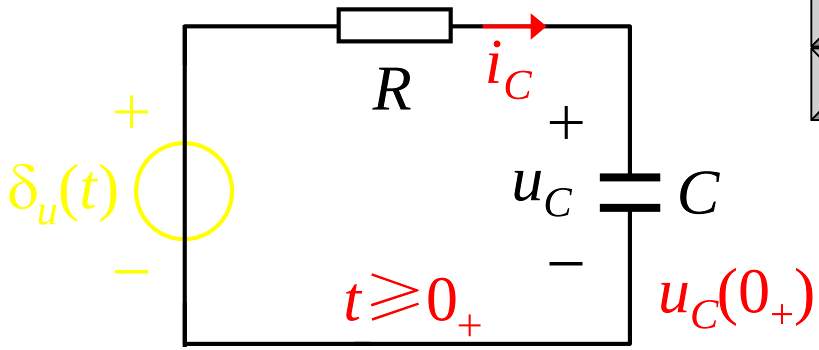
可用三要素法求解。

若$\delta(t)$的强度为k

则 $u_C(0_+) = \dfrac{k}{C} + u_C(0_-)$ $\qquad$ $i_L(0_+) = \dfrac{k}{L} + i_L(0_-)$

4. 解题指导

题1：求RC串联电路的单位冲击响应。解：



①列$t \geqslant 0_$时的微分方程

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = \delta_i(t) \\ u_C(0_-) = 0 \end{cases}$$

②对方程两边从0_到0_+积分

得 $C[u_C(0_+) - u_C(0_-)] = 1$

初始条件为

$$u_C(0_+) = \frac{1}{RC}$$

③求零输入响应

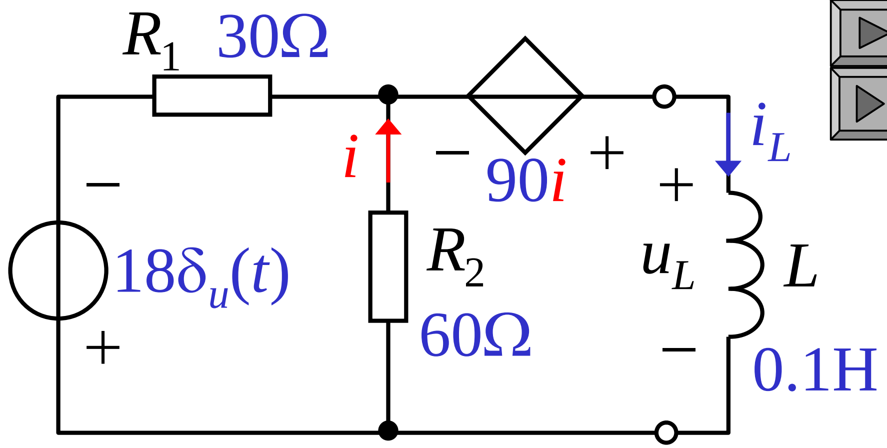
$\tau = RC$， $u_C(\infty) = 0$

代入三要素公式得

$$u_C(t) = \frac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$的“起始性”表示$u_C(t)$从$t \geqslant 0_+$开始。

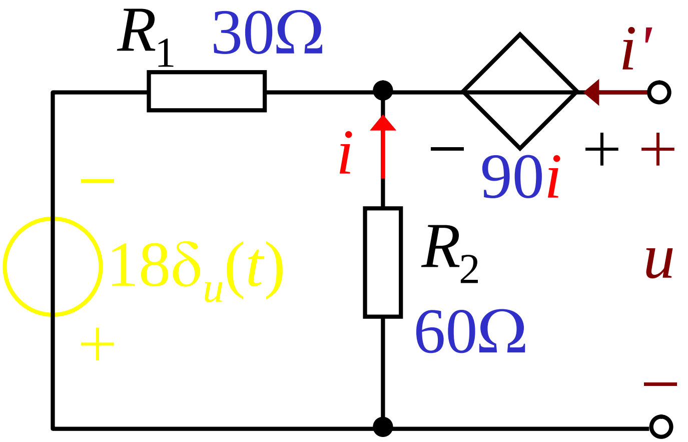
题2：电路如图，试求i_L。

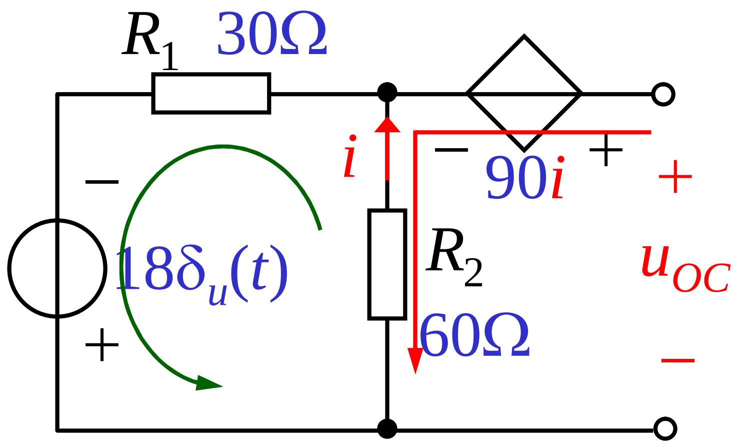


解：求戴维宁等效电路

$$i = \frac{18\delta_u(t)}{30+60} = 0.2\delta_u(t)$$

$$u_{oc} = 90i - 60i = 30i = 6\delta_u(t)$$





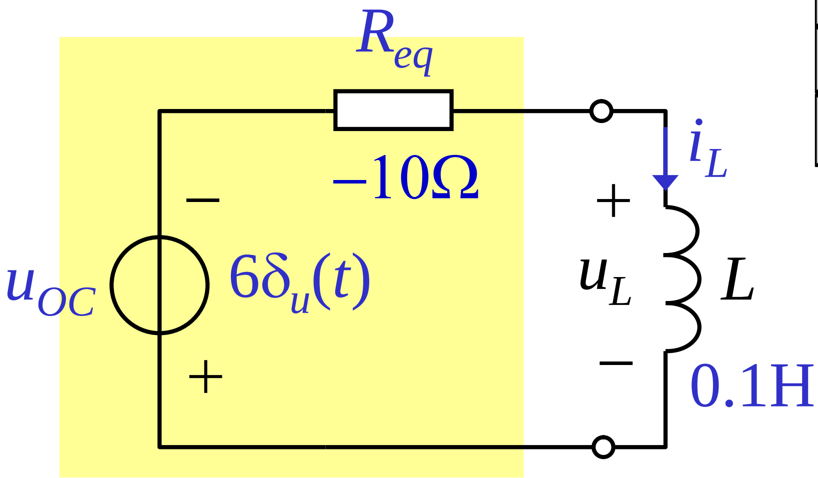
$$u = 90i - 60i = 30i = -10i'$$

$$i = -\frac{30\,i'}{30+60} = -\frac{1}{3}\,i'$$

$$R_{eq} = \frac{u}{i'} = -10\Omega$$ 有CCVC

戴维宁等效电路如图。

单位冲击电压作用于*RL*串联电路的初始值为



$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} + i_L(0_-)$$ 所以

$$i_L(0_+) = \frac{6}{L} = 60\text{A}, \qquad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.1}{-10} = -0.01\text{s}$$

引用典型(*RL*串联)电路结果得 $i_L(t) = 60\,\mathrm{e}^{100t}\,\varepsilon(t)\ \text{A}$

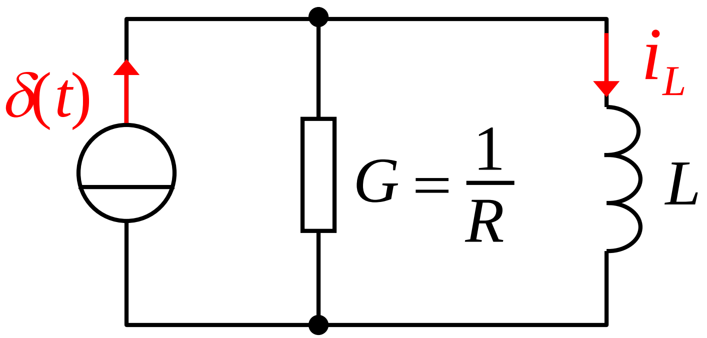
此类响应称为无限响应。当元件毁坏或进入饱和状态时，响应达到一个限定值。考虑无限响应时，终值变得有些混淆。用三要素法求解不如通过微分方程求解：

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0 \qquad i_L(0_+) = \frac{1}{L} + i_L(0_-)$$

5. 单位冲击响应与单位阶跃响应的关系

对同一电路同一变量，若单位阶跃响应为$s(t)$，单位冲击响应为$h(t)$，则两者的关系为

$$\left.\begin{aligned} h(t) &= \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}$$



例如：已知RL并联电路在$\delta(t)$作用下的

$$i_L = \frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

求在$\varepsilon(t)$作用下的$i_L=?$

解：$i_L = \int_{-\infty}^{t} i_L(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

$$= -\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{\xi}{\tau}\right)$$

$$= -\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}\Big|_0^t = \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)\varepsilon(t)$$

P199 题7-35，试求i。 解：

求戴维宁等效电路

$u_{OC}=[25\varepsilon(t)+\delta(t)]$ V，$R_{eq}=5\Omega$

求单位阶跃响应

$\tau = 0.1/5$ (s)，$i(\infty)=1/5$ (A)

$s(t) = 0.2(1-e^{-50t})$ A

由齐性定理得阶跃响应

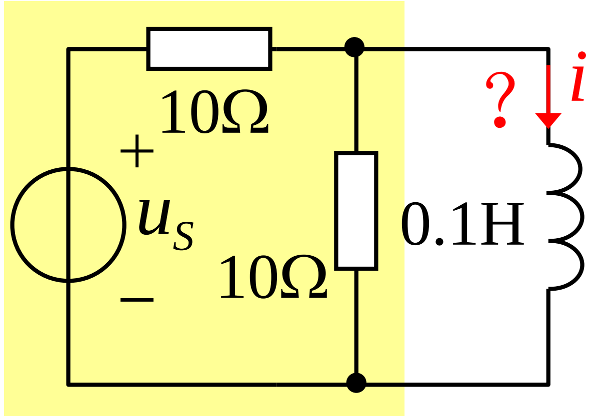
$i^{(1)}=25s(t)=5(1-e^{-50t})$ A

$\delta(t)$单独作用时的响应

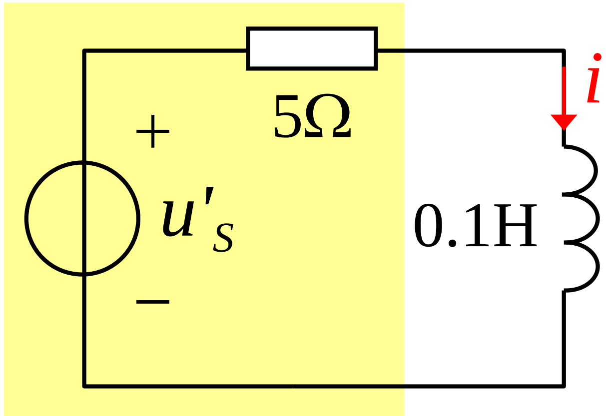
$$i^{(2)}=\frac{ds(t)}{dt}=10e^{-50t} \text{ A}$$

由叠加定理得 $i=i^{(1)}+i^{(2)}$

$$= 5(1-e^{-50t})+10e^{-50t} = 5+5e^{-50t}\,\varepsilon(t) \quad \text{A}$$



$u_S=[50\varepsilon(t)+2\delta(t)]$ V



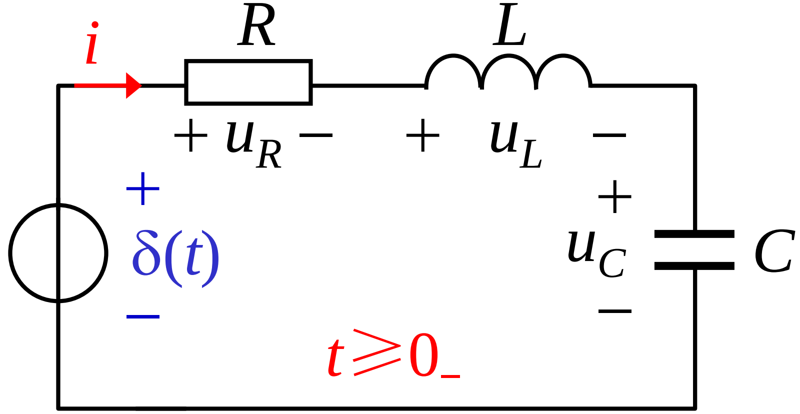
$u'_S=[25\varepsilon(t)+\delta(t)]$ V

6. 二阶电路的冲击响应

有两种求解方法：

- 先求单位阶跃响应，再对时间求导数得单位冲击响应。最后乘以冲击强度k。
- 从冲击函数的定义出发直接求结果：

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=\delta(t) \\ u_C(0_-)=0,\quad i_L(0_-)=0 \end{cases}$$



冲击函数作用后有

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \quad t\geqslant 0_+$$

变成求零输入响应问题。

此法的关键是求初始值，具体方法与一阶电路相似。

先求$u_C(0_+)$和 $i_L(0_+)$

$$\begin{cases} LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=\delta(t) \\ u_C(0\_)=0,\quad i_L(0\_)=0 \end{cases}$$

方程两边从 0_到0_+积分

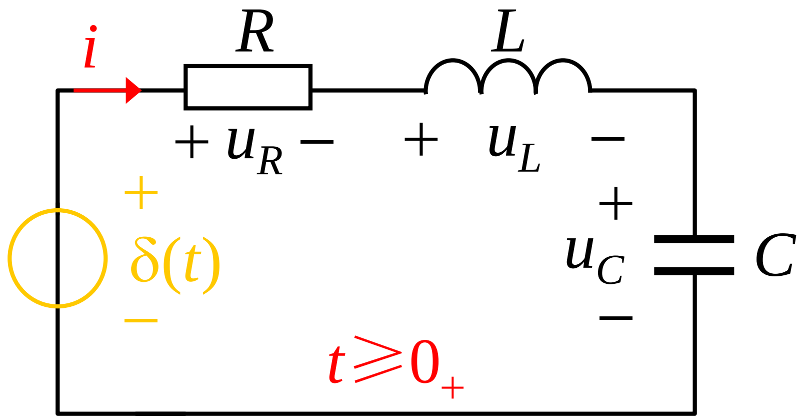
$$LC\left[\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+}+\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0\_}\right]+RC[u_C(0_+)-u_C(0\_)]+\int_{0\_}^{0_+}u_C\,dt=1$$

由零状态条件知该项为0。

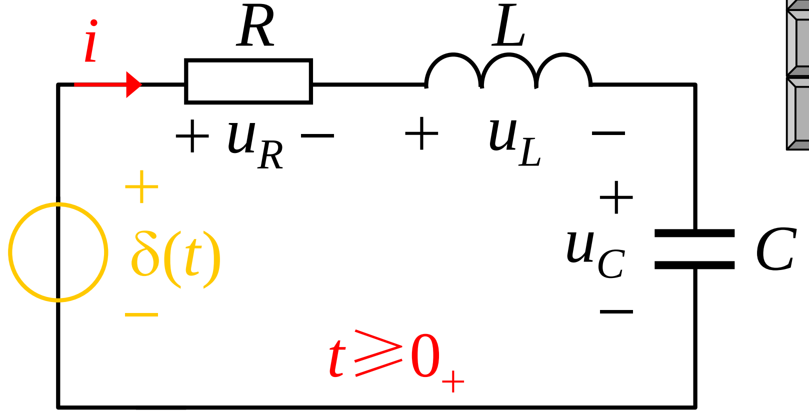
u_C不是δ(t)函数，即u_C不能跃变，这两项也是0。

所以：$LC\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+}=1$

电路中的电流产生了跃变，即电感电流发生跃变。



$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=0 \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{LC} \end{cases}$$



冲击过后，电感中储存的磁场能量要释放，引起了过渡过程。可见二阶电路的冲击响应也有两个过程：

① $t=0_-\rightarrow 0_+$

在$\delta(t)$的作用下建立初始值：$\left.LC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=1$

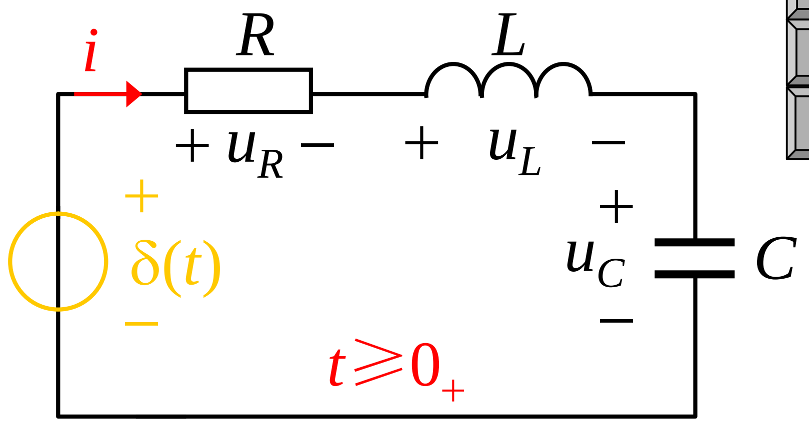
即：$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{LC}$

② $t\geq 0_+$

由初始条件$i_L(0_+)$引起的零输入响应过程。

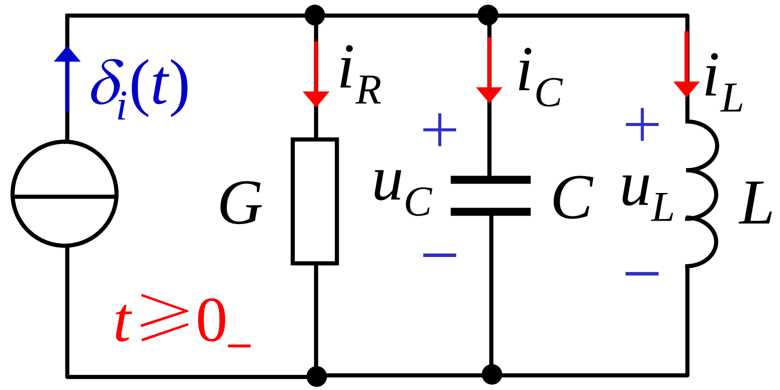
这一阶段的分析和解答与§7–5相同。

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=0,\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{LC} \end{cases}$$



➢对RLC并联电路，分析过程相同，也可用对偶原理

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0 \\ i_L(0_+)=0\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{LC} \end{cases}$$



冲击电流作用后，电容两端的电压产生了跃变:

$u_C(0_+)=u_L(0_+)=\dfrac{1}{C}$ 电场能量释放引起过渡过程。

*7–9 卷积积分

略

*§7–10 状态方程

1. 关于状态变量

若干元素为了某种目的有机地相互组合成一个总体就称为系统。状态是系统理论中的一个基本概念。

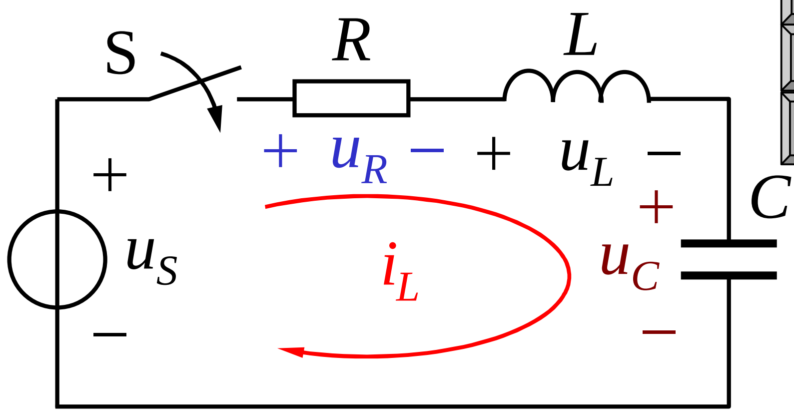
①状态是用来描述系统的一组最少数目的变量，这组独立的变量称为状态变量。

引入系统状态的概念后，对系统的描述就不仅停留在外部(输入输出)，而是深入到了内部。

所以，在理论上，状态变量不要求一定是可观察或可测量的变量。但是在实践中，总是尽量选择一些易观察和易测的量作为状态变量。

例如，在自动控制系统中，需要将状态变量作为反馈量，以完成某种控制。

②以*RLC*串联电路为例



u_C、i_L、u_R、u_L、q、ψ 等变量反映着电路各方面的特征，但它们不是独立的：

$$q = Cu_C\,,\quad \psi = Li_L,\quad u_R = Ri_L,\quad u_L = u_S - u_C - Ri_L$$

i_L、u_C满足：$C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L\,,\quad L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -Ri_L - u_C + u_S$

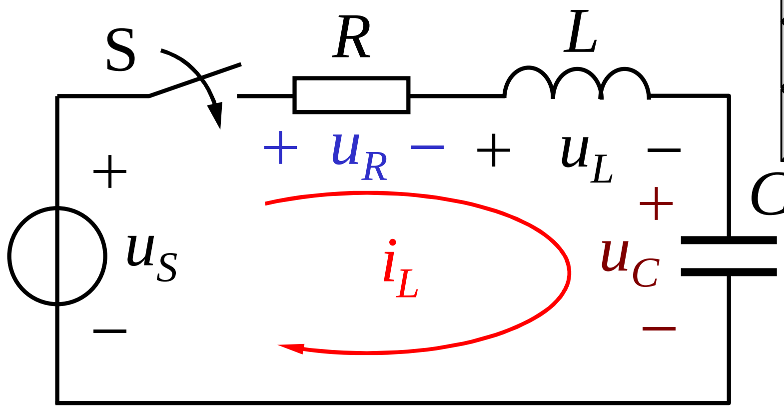
改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= 0 + \frac{1}{C}i_L + 0\\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_S\end{aligned}\right\}$$

若知道初始状态 $u_C(t_0)$、$i_L(t_0)$和$t \geqslant t_0$时刻的激励u_S，就能唯一确定$t > t_0$后电路的全部性状。

u_C、i_L 就是该电路的一组状态变量。其余各量都能用u_C、i_L表示。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= 0 + \frac{1}{C} i_L + 0 \\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_S\end{aligned}\right\}$$



③状态变量不是唯一的

将$i_L=(u_R/R)$代入上述方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= 0 + \frac{1}{RC} u_R + 0 \\ \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R}{L} u_C - \frac{R}{L} u_R + \frac{R}{L} u_S\end{aligned}\right\}$$

u_C、u_R也是该电路的一组状态变量。

- 状态变量是一组独立的动态变量。
- 对线性电路而言，选u_C、i_L作为状态变量很合适。
  对非线性电路，有时会选q_C、ψ_L作为状态变量。

2. 状态方程的标准形式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= 0 + \frac{1}{C}i_L + 0\\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_S\end{aligned}\right\}$$

用状态变量表达的一组独立的一阶微分方程称为状态变量方程，简称状态方程。

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}}_{\text{系数矩阵}\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}_{\text{系数矩阵}\boldsymbol{B}}\begin{bmatrix}i_S\\ u_S\end{bmatrix}$$

令 $x_1 = u_C$

$x_2 = i_L$

$$\dot{x}_1 = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

则 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}i_S\\ u_S\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} i_S \\ u_S \end{bmatrix}$$

若 $\dot{\boldsymbol{x}} \overset{\text{def}}{=\!=} [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{v} = [i_S \quad u_S]^{\mathrm{T}}$

则 状态方程具有更简洁的形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{标准形式}$$

$\boldsymbol{x}$ 称为状态向量， $\boldsymbol{v}$ 称为输入向量。

☞若电路具有n个状态变量， m个激励源。

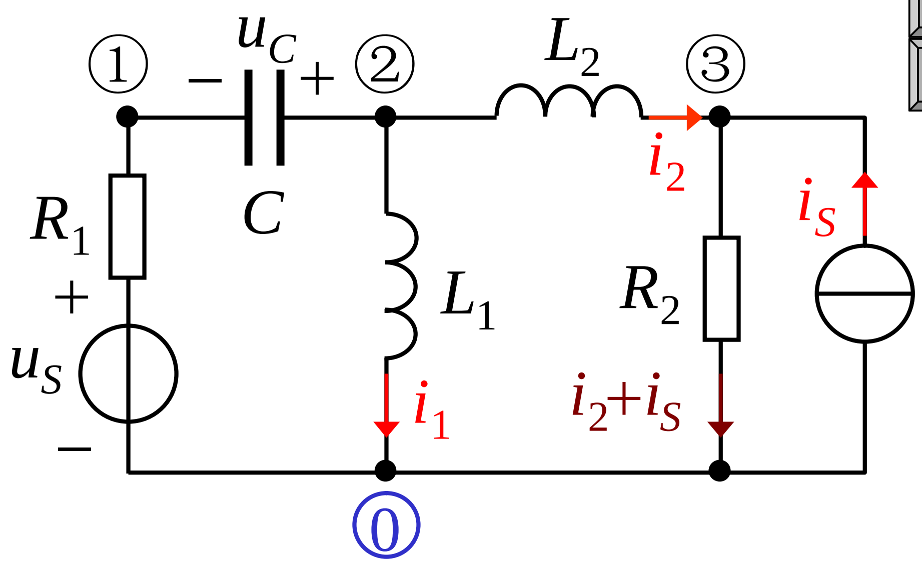
则 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 为n阶列向量；矩阵$\boldsymbol{A}$为$n \times n$阶方阵；

$\boldsymbol{v}$ 为 m 阶列向量； 矩阵$\boldsymbol{B}$为$n \times m$阶矩阵。

✍状态方程的编写方法：直观法和系统法。

较简单的电路用直观法，复杂的电路用系统法。

3. 状态方程的编写



- 在线性电路中，选独立的电容电压和独立的电感电流作为状态变量编写状态方程和求解最方便。

✍ 直观法的编写步骤

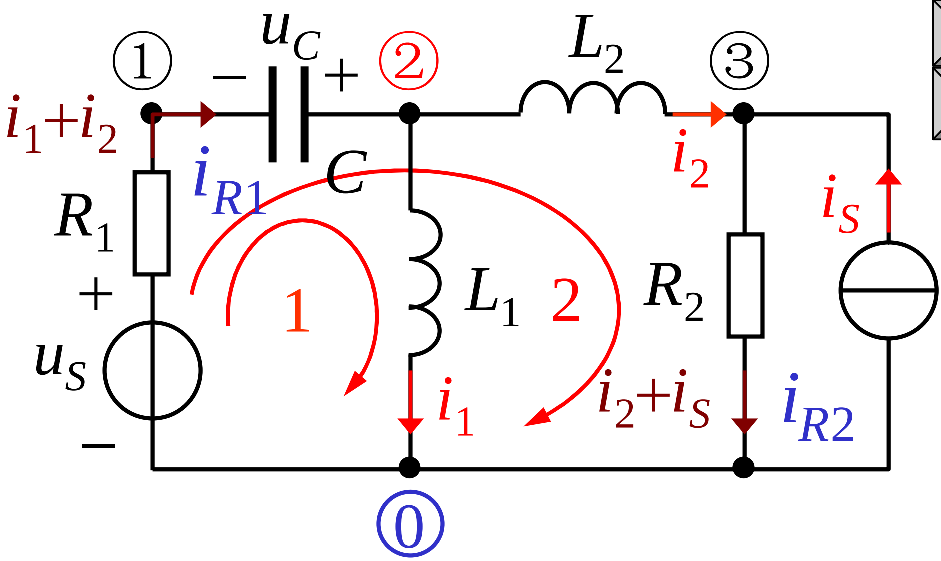
在状态方程中，要包含对状态变量的一次导数：

(1)对只含一个*C*的结点列KCL方程；

(2)对只含一个*L*的回路列KVL 方程；

(3)列其它方程(若有必要)，消去非状态变量。

列出以u_C、 i_1和i_2为状态变量的方程。解：



✍对只含一个C的结点列KCL方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-i_1-i_2$$

✍对只含一个L的回路列KVL方程

☝ $$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=u_C-R_1(i_1+i_2)+u_S$$

✌ $$L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=u_C-\underbrace{R_1(i_1+i_2)}_{i_{R1}}+u_S-\underbrace{R_2(i_2+i_S)}_{i_{R2}}$$

非状态变量已预先做了处理

☺方程中不含非状态变量，不用列其它方程。

$$\left.\begin{aligned} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= -i_1 - i_2 \\ L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= u_C - R_1(i_1+i_2) + u_S \\ L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= u_C - R_1(i_1+i_2) + u_S - R_2(i_2+i_S) \end{aligned}\right\}$$

✍整理成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

4. 电路(或系统)的状态空间描述

状态方程只表示了状态对输入和初始状态的关系：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}\,,\quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

☞在实用中，为了完整地表示动态电路，还要建立输出与状态、输入之间的关系，称输出方程。

状态方程与输出方程联立，称为动态电路的状态空间描述。输出方程： $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}$

☞若 电路具有n个状态变量, m个激励源, h个输出变量。

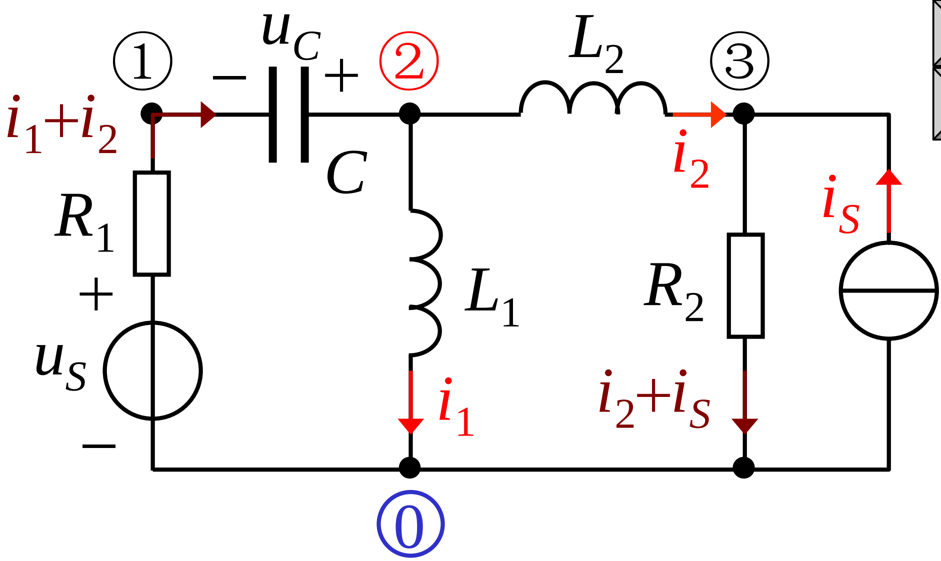
则 $\boldsymbol{y}$ 是h维输出向量；

$\boldsymbol{C}$是$h\times n$系数矩阵；$\boldsymbol{D}$是$h\times m$系数矩阵。

$\boldsymbol{C}$ 、$\boldsymbol{D}$ 仅与电路结构和元件参数有关。

$$y = Cx + Dv$$

对右图电路，已编写过它的状态方程。



若以结点①②③的电压作为输出，则有

$$\left.\begin{aligned} u_{n1} &= -R_1(i_1+i_2) + u_S \\ u_{n2} &= u_C-(i_1+i_2)R_1 + u_S \\ u_{n3} &= R_2(i_2+i_S) \end{aligned}\right\}$$ 整理成标准形式

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 & -R_1 \\ 1 & -R_1 & -R_1 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

*7-11 动态电路时域分析中的几个问题

1. 关于动态电路的阶数

微分方程的阶次称为动态电路的阶数。

动态电路的阶数与所含独立动态元件的个数有关。

(1)常态网络

不含纯电容回路(包括电压源)以及纯电感割集(包括电流源)在内的网络。所以有：

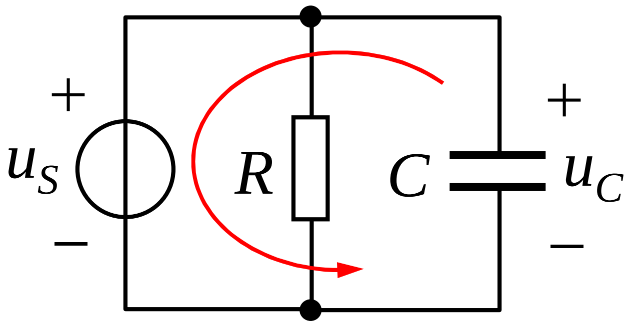
电路的阶数 = 动态元件的个数。

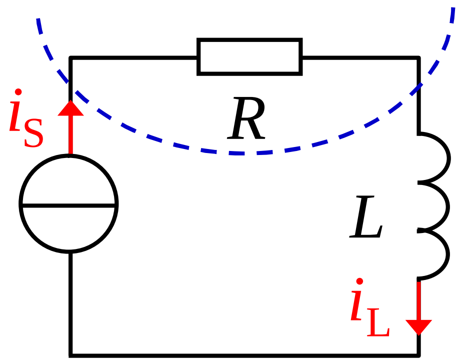
例如前面分析过的电路：仅含一个贮能元件(常值C与L)和电阻的电路，或能化为此形式的电路，都属于一阶电路。RLC串联或并联电路属于二阶电路。

(2)非常态网络

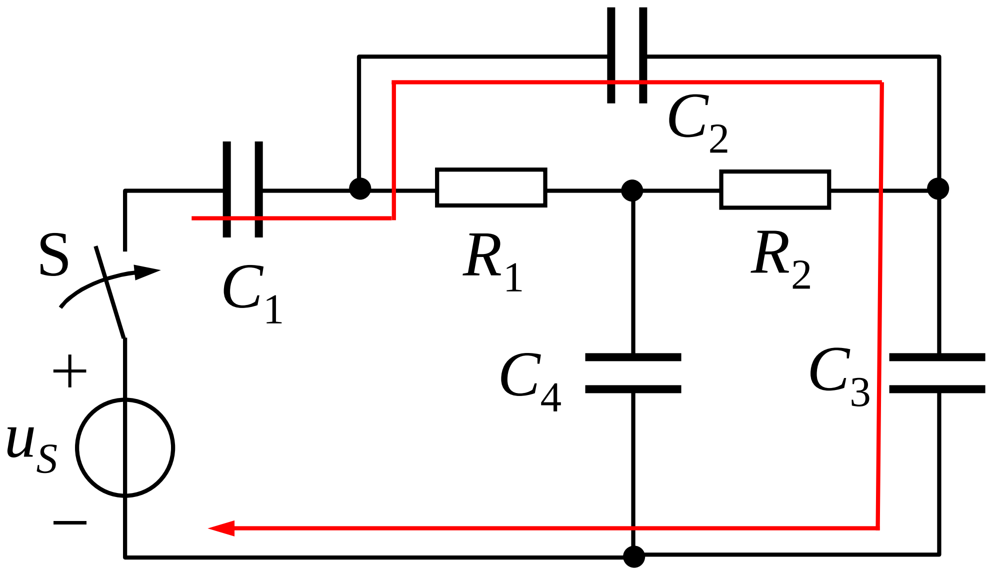
含纯电容回路或纯电感割集或二者兼有。

电路的阶数 = 动态元件总数 – 独立纯电容回路个数 – 独立纯电感割集个数



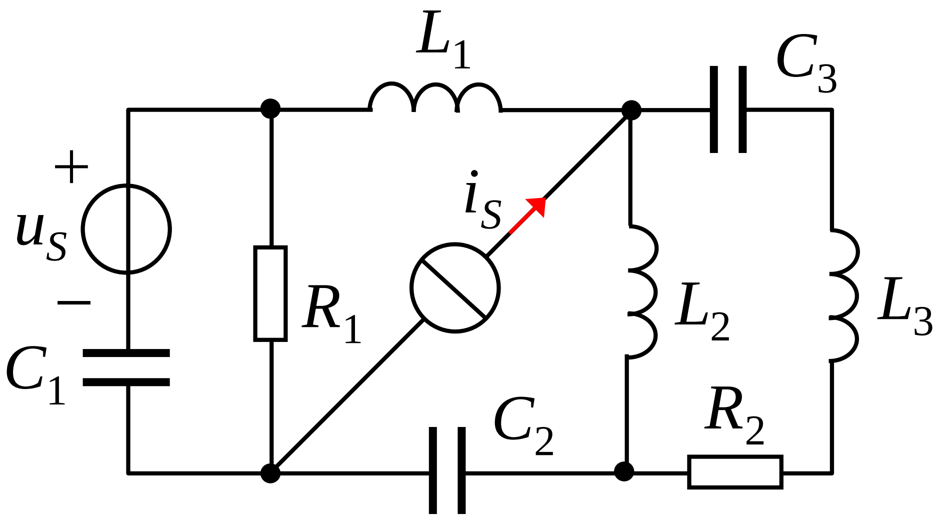


阶数 = 0

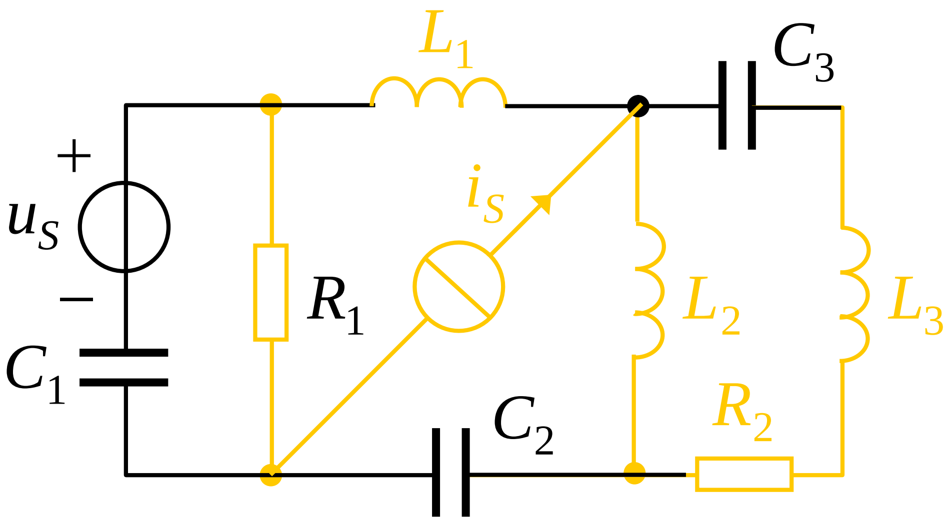


阶数 = 4 −1= 3

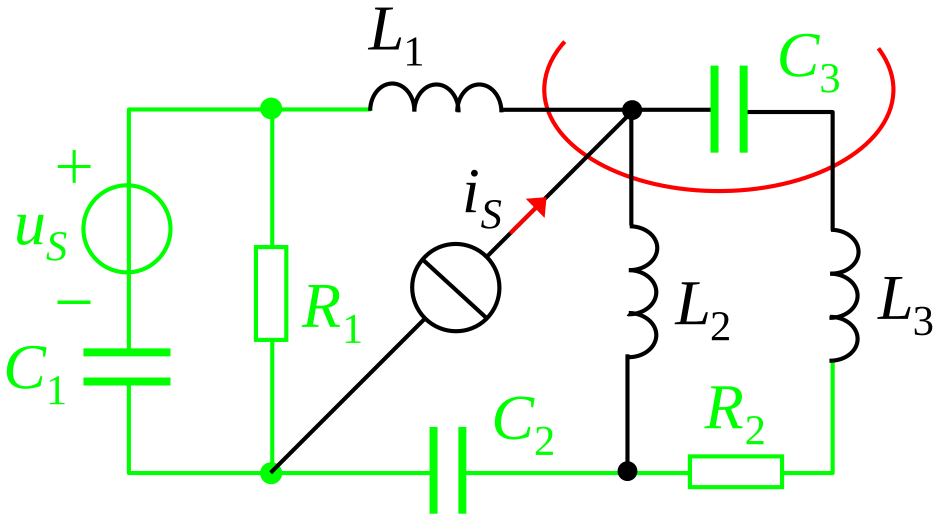
练习：分析图示电路的阶数。



解：$6-1=5$阶



电容子网络无独立回路



电感子网络有1个独立割集

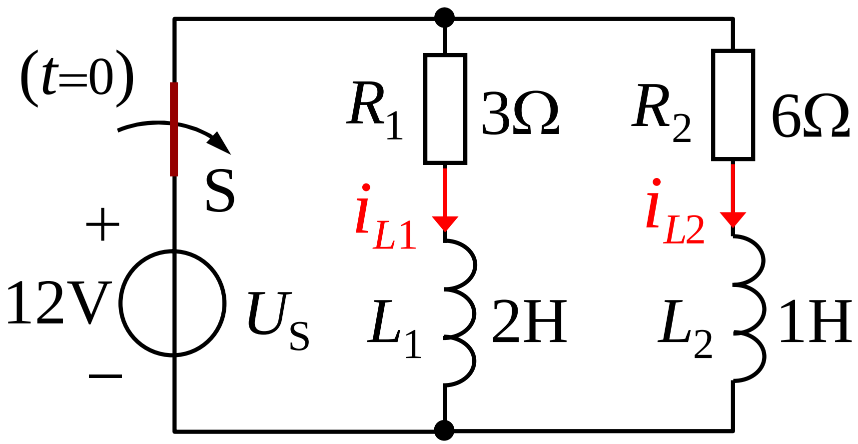
2. 动态电路中初始值的计算

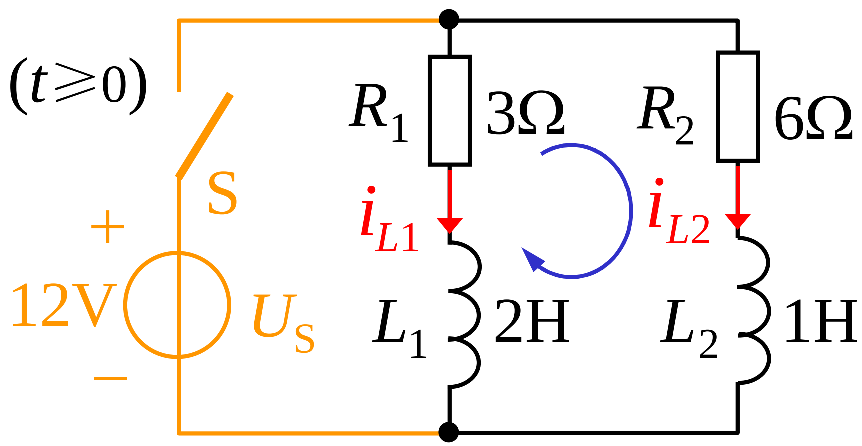
换路定则必须遵循电荷守恒定律和磁链不变原则：

$\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-)$ 或 $\sum C_k u_{Ck}(0_+) = \sum C_k u_{Ck}(0_-)$

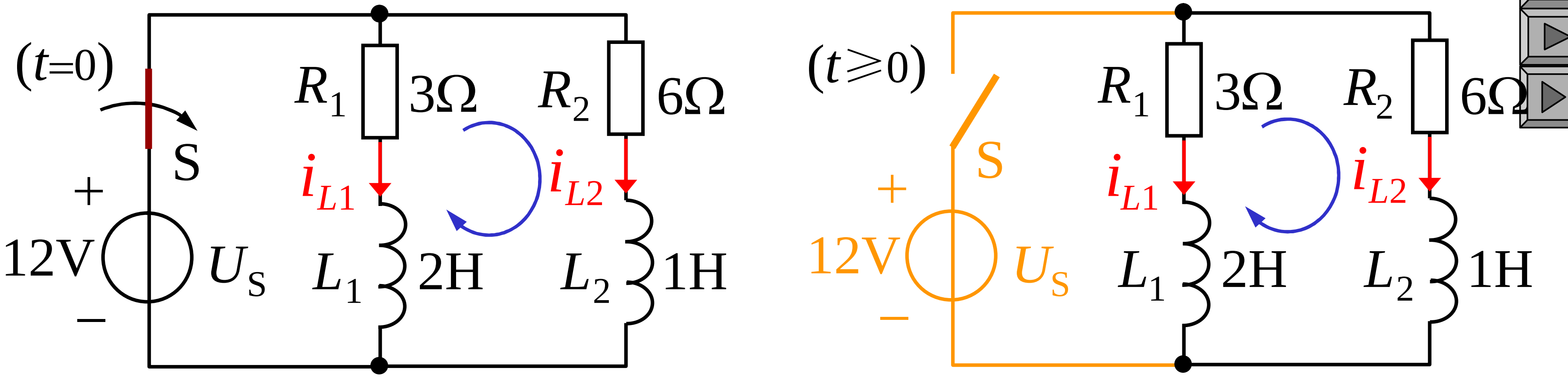
$\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-)$ 或 $\sum L_k i_{Lk}(0_+) = \sum L_k i_{Lk}(0_-)$

例1：电路稳定后将S打开，求$i_{L1}(0_+)$ 和 $i_{L2}(0_+)$ 。解





换路前 $i_{L1}(0_-) = \dfrac{U_S}{R_1} = 4A$，$i_{L2}(0_-) = \dfrac{U_S}{R_2} = 2A$



换路前： $i_{L1}(0_-) = 4\text{A}$， $i_{L2}(0_-) = 2\text{A}$

出现了 $i_L(0_-) \neq i_L(0_+)$

换路后KCL要求 $i_{L2}(0_+) = -i_{L1}(0_+)$

但 $\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) \Rightarrow (L_1 + L_2)\, i_{L2}(0_+) = L_2 i_{L2}(0_-) - L_1 i_{L1}(0_-)$

$$i_{L2}(0_+) = \frac{L_2 i_{L2}(0_-) - L_1 i_{L1}(0_-)}{L_1 + L_2} = \frac{1\times 2 - 2\times 4}{2+1} = -2\ \text{A}$$

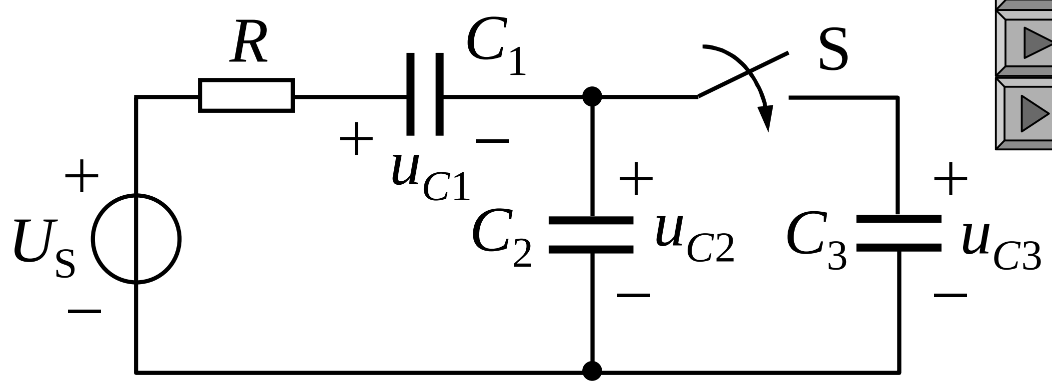
$i_{L1}(0_+) = 2\text{A}$

$i_{L2}(\infty) = -i_{L1}(\infty) = 0$

$\tau = (L_1 + L_2)\,/\,(R_1 + R_2)$

电感中电流变化引起的电压遵循KVL方程中关于正负号的规定。

例2：S闭合前电路稳定，U_S=6V，C_3=2F，$C_1=C_2$=1F， t=0时S闭合，求各电容电压的初始值(C_3原未充电)。



解：

S闭合前 $u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = 3\text{V}$， $u_{C3}(0_-) = 0$

S闭合后 $u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 3\text{V}$， 但 $u_{C2}(0_+) = u_{C3}(0_+)$

换路时刻，C_2、C_3的电荷重新分配，但保持守恒。

$$C_2\, u_{C2}(0_+) + C_3\, u_{C3}(0_+) = C_2\, u_{C2}(0_-) + C_3\, u_{C3}(0_-)$$

代入数据：$u_{C2}(0_+) + 2\,u_{C3}(0_+) = 3 + 0$

由KVL知：$u_{C2}(0_+) = u_{C3}(0_+)$

$$\left.\begin{aligned} &u_{C2}(0_+) + 2\,u_{C3}(0_+) = 3 + 0 \\ &u_{C2}(0_+) = u_{C3}(0_+) \end{aligned}\right\}$$

解之：$u_{C2}(0_+) = u_{C3}(0_+) = 1\text{V}$

3. 非齐次微分方程特解的计算

以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Ay=f(t)$ 为例

输入$f(t)$的形式	特解y^*的形式
常数P	常数Q
P_0+P_1t （P_0可以为0）	Q_0+Q_1t
$P_0+P_1t+P_2t^2$	$Q_0+Q_1t+Q_2t^2$
$P\mathrm{e}^{-mt}$ $(m\neq A)$	$Q\mathrm{e}^{-mt}$
$P\mathrm{e}^{-mt}$ $(m=A)$	$Qt\,\mathrm{e}^{-mt}$
$P\sin\omega t$ （或$P\cos\omega t$）	$Q_1\sin\omega t+Q_2\cos\omega t$

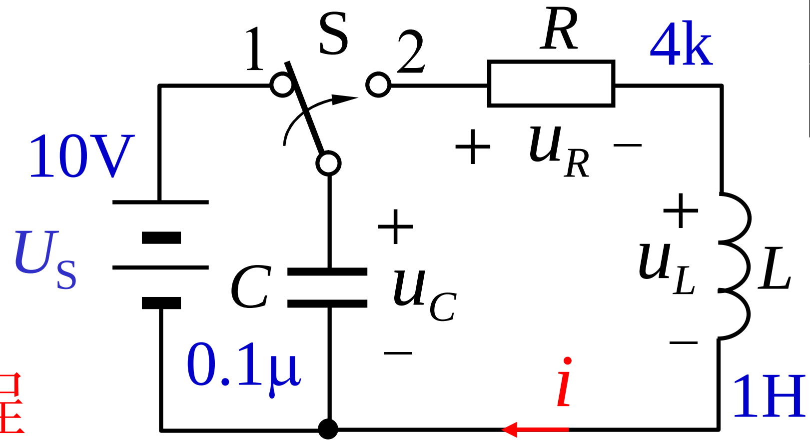
本章结束

P159 例7-6

求： u_C、u_R、i、u_L和i_{max}

根据已知条件算出:

$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 属非振荡放电过程



套用下列公式可得到结果

$$p_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$p_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t})$$

$$i=-\frac{U_0}{L(p_2-p_1)}(e^{p_1t}-e^{p_2t})$$

$$u_L=-\frac{U_0}{(p_2-p_1)}(p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t})$$

$u_R=Ri$　　　$i=i_{max}$的时间

$$t_m=\frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1-p_2}$$

P162 例7−8

试验步骤：

①闭合S_1，让C充电到U_0；

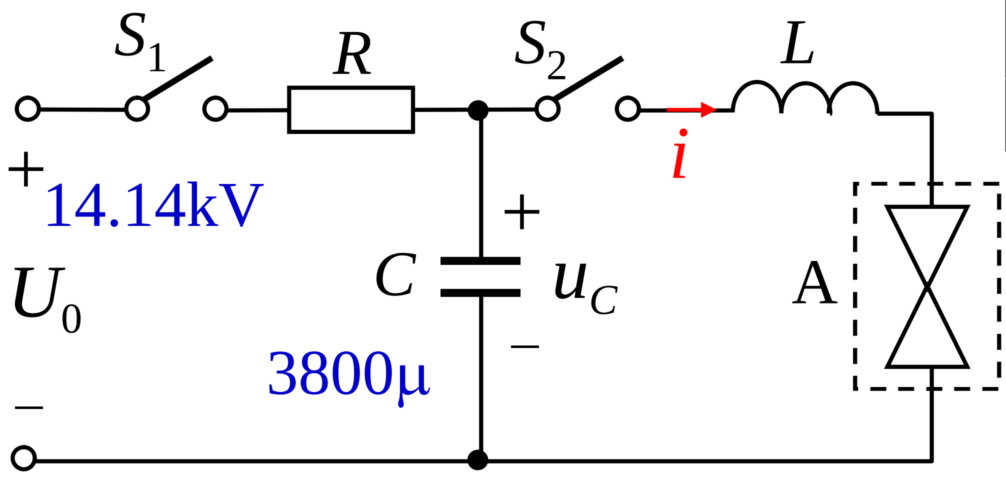
②打开S_1，接通S_2，C开始放电。

③在适当的时候，把被试高压开关A拉开。

*L*用很粗的导线绕制，其电阻可忽略不计。

(1) 为了模拟50Hz的工频电流，L=?

(2) $u_C(t)$ =? $i(t)$ =?



试验高压开关灭弧能力的振荡电路

解：$\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 2\pi f = 314\ \text{rad/s}$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 2.67\ \ (\text{mH})$$

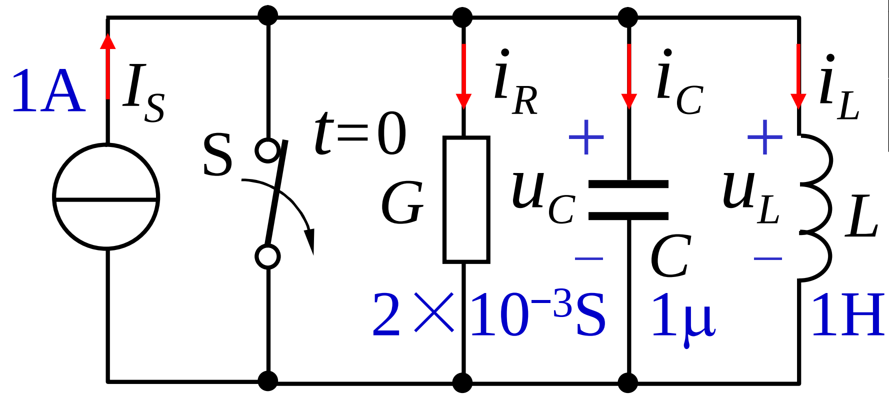
$$i = \frac{U_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t = 16.9\sin 314t\ (\text{kA})$$

$$u_C = u_L = U_0\sin(\omega_0 t + 90^\circ)$$

$$= 14.14\sin(314t + 90^\circ)\ \ (\text{kV})$$

P165 例7-9

求： i_L、u_C 和 i_C



$u_C(0_-) = 0$ $i_L(0_-) = 0$

- 解：S动作时，相当于对电路外施单位阶跃电流 $i_s=\varepsilon(t)$ A。

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=I_S$$

特征方程：

$$p^2+\frac{G}{C}p+\frac{1}{LC}=0$$

$$p_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

代入数据：$p_1=p_2=p=-10^{-3}$

- 对应齐次方程的解为：

$$i''_L=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-pt} \text{ A}$$

- 特解：$i'_L=1$ A
- 全解：$i_L=1+(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-pt}$ A

初始值：

$$\left.\left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{0_+}=\frac{u_L(0_+)}{L}=\frac{u_C(0_+)}{L}=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$