

第十四章 线性动态电路的复频域分析

主要内容

- ①拉普拉斯变换及其与电路分析有关的性质;
- ②反变换的方法;
- ③KCL、KVL和VCR的运算形式;
- ④拉氏变换在线性电路中的应用;
- ⑤网络函数的定义与含义;
- ⑥极点与零点对时域响应的影响;
- ⑦极点与零点与频率响应的关系。

基本要求

- ①了解拉普拉斯变换的定义，会用拉普拉斯变换的基本性质求象函数。
- ②掌握求拉普拉斯反变换的部分分式展开法、基尔霍夫定律的运算形式、运算阻抗和运算导纳、运算电路。
- ③掌握应用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤。
- ④理解网络函数的定义和极点、零点的概念；
- ⑤掌握网络函数的零点、极点与冲激响应的关系；
- ⑥掌握网络函数的零点、极点与频率响应的关系；

重点

- ①拉普拉斯反变换部分分式展开；
- ②基尔霍夫定律的运算形式、运算阻抗和运算导纳、运算电路；
- ③应用拉普拉斯变换分析线性电路的方法和步骤。
- ④网络函数的定义和极点、零点的概念；
- ⑤网络函数的零点、极点与冲激响应的关系；
- ⑥网络函数的零点、极点与频率响应的关系。

难点

- ①拉普拉斯反变换的部分分式展开法;
- ②电路分析方法及定理在拉普拉斯变换中的应用。
- ③零点、极点与冲激响应的关系
- ④零点、极点与频率响应的关系

与其它章节的联系

- 🔔 **拉氏变换：解决电路的动态分析问题。**即解决第七章的问题，称之为**运算法**，是后续各章的基础，前几章基于变换思想的延续。
- 🔔 网络函数部分以**拉氏变换**为基础，是叠加定理的一种表现。冲激响应参见第 7 章、频率响应参见第 11 章。

§ 14-1 拉普拉斯变换的定义

1. 引言

- ☛ 拉普拉斯变换法是一种数学积分变换，其核心是把时间函数 $f(t)$ 与复变函数 $F(s)$ 联系起来，把时域问题通过数学变换化为复频域问题。
- ☛ 两个特点：一是把时间域的高阶微分方程变换为复频域的代数方程；二是将电流和电压的初始值自动引入代数方程中，在变换处理过程中，初始条件成为变换的一部分。
- ☛ 由于解复变函数的代数方程比解时域微分方程较有规律且有效，所以拉普拉斯变换在线性电路分析中得到广泛应用。

1. 定义

☞ 一个定义在 $[0, +\infty]$ 区间的函数 $f(t)$ ，它的拉普拉斯变换式 $F(s)$ 定义为：

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数，被称为复频率；

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数， $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。

☞ 由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换，它定义为：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} dt$$

式中 c 为正的有限常数。

注意

(1) 定义中拉氏变换的积分从 $t=0_-$ 开始，即：

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st}dt + \int_{0_+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

它计及 $t=0_-$ 至 0_+ ， $f(t)$ 包含的冲激和电路动态变量的初始值，从而为电路的计算带来方便。

(2) 象函数 $F(s)$ 一般用大写字母表示，如 $I(s)$ 、 $U(s)$ ，
原函数 $f(t)$ 用小写字母表示，如 $i(t)$ ， $u(t)$ 。

☞ 象函数 $F(s)$ 存在的条件： $\text{Re}[s]=s > c$ 。

在电气领域中所用到的都是有实际意义的(电压或电流)信号，它们的函数表达式 $f(t)$ 都存在拉氏变换。
所以应用时不再计较 $F(s)$ 的存在条件。

2. 典型函数的拉氏变换 P345例14-1

(1) 单位阶跃函数 $f(t) = \varepsilon(t)$

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} \quad \mathcal{L} [\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$$

(2) 单位冲激函数 $\delta(t)$

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s(0)} \quad \mathcal{L} [\delta(t)] = 1$$

(3) 指数函数 $f(t) = e^{\alpha t}$ (α 为实数)

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{-(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0_-}^{\infty}$$

$$\mathcal{L} [e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$$

§ 14-2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

设: $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

A_1 、 A_2 是两个任意实常数。

则: $\mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$

$$\begin{aligned}
 \text{证: 左} &= \int_{0_-}^{\infty} [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\
 &= \underbrace{A_1 \int_{0_-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt}_{A_1 F_1(s)} + \underbrace{A_2 \int_{0_-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt}_{A_2 F_2(s)} = \text{右}
 \end{aligned}$$

P346 例14-2 若 $f_1(t)=\sin(\omega t)$, $f_2(t)=K(1-e^{-\alpha t})$ 的定义域为 $[0, \infty]$, 求其象函数。 解:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t)] &= \mathcal{L}[\sin(\omega t)] \xrightarrow{\text{欧拉公式}} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &\xrightarrow{\text{线性性质}} \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \quad \text{引用 } \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[K(1-e^{-\alpha t})] \xrightarrow{\text{线性性质}} \mathcal{L}[K] - \mathcal{L}[Ke^{-\alpha t}]$$

引用阶跃函数和指数函数的结论

$$\begin{aligned}&= \frac{K}{s} - \frac{K}{s+\alpha} = \frac{K\alpha}{s(s+\alpha)} \quad \mathcal{L}[K(1-e^{-\alpha t})] = \frac{K\alpha}{s(s+\alpha)}\end{aligned}$$

2. 微分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$

$$\begin{aligned} \text{证: } \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} df(t) \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t) de^{-st} = -f(0_-) + s \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$\nearrow F(s)$

推论: $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$

特别, 当 $f(0_-) = f'(0_-) = \dots = f^{(n-1)}(0_-) = 0$ 时

则有 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s), \dots, \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$

该性质可将 $f(t)$ 的微分方程化为 $F(s)$ 的代数方程, 是分析线性电路(系统)的得力工具。

P347 例14-3 用微分性质求 $\cos(\omega t)$ 和 $\delta(t)$ 的象函数。

解: $\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$

利用微分性质和已知结果:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = 1/s,$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d\sin(\omega t)}{dt}\right] = \frac{1}{\omega} \left[s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(0_-) \right]$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right] = s \left(\frac{1}{s} - 0 \right) = 1$$

3. 积分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\text{则 } \mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

证： 设 $g(t) = \int_{0_-}^t f(t) dt$

则有 $g'(t) = f(t)$, 且 $g(0) = 0$

由微分性质

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g'(t)] &= s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \\ &= s\mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[g'(t)]$$

推论： 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则重复应用积分性质可得 n 重积分的象函数

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t dt \int_{0_-}^t dt \cdots \int_{0_-}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

P348 例14-4, 求 $f(t)=t$ 的象函数。

解: $f(t)=t=\int_{0_-}^t \varepsilon(\xi) d\xi$

利用积分性质 $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\varepsilon(\xi)] = \frac{1}{s^2}$ $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

4. 延迟性质

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 又 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 。

则 对任一实数 t_0 有: $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$

5. 卷积性质

若 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在 $t<0$ 时为0, 则 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积定义为

$[f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\xi)f_2(\xi)d\xi$ 取拉氏变换有

$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s)$

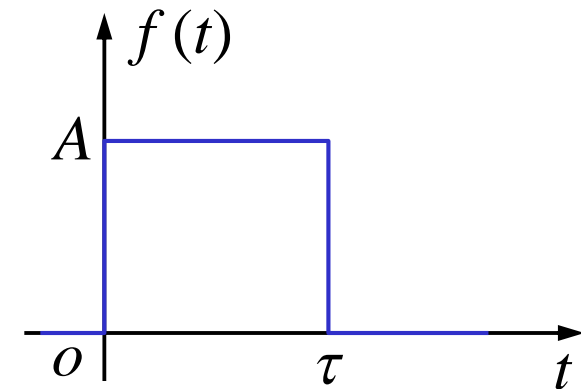
P349例14-5 求矩形脉冲的象函数。

解： $f(t) = A [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)]$

$$\mathcal{L} [\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L} [\varepsilon(t - \tau)] = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

$$\mathcal{L} [f(t)] = \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-s\tau} = \frac{A}{s} (1 - e^{-s\tau})$$



*5.位移性质： $\mathcal{L} [e^{at} f(t)] = F(s - a)$

*6.初值定理： $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)]$

*7.终值定理： $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)]$

常用的拉氏变换表见教材P350之表14-1。

§ 14-3 拉氏反变换的部分分式展开

💡 用拉氏变换求解线性电路的时域响应时，需要把求得的响应的拉氏变换式反变换为时间函数。由象函数求原函数的方法有

👉 利用公式
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} dt$$

公式涉及到以 s 为变量的复变函数的积分，比较复杂。工程上一般不采用这种方法。

✌ 若象函数是，或稍加变换后是表14-1中所具有的形式，可直接查表得原函数。

👉 把 $F(s)$ 分解为简单项的组合，称部分分式展开法。

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots$$

例：求 $F(s) = \frac{1}{s^2 + 3}$ 的原函数。

解： $F(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{s^2 + (\sqrt{3})^2}$

查表： $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

所以： $f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} t$

1. 部分分式展开法

在线性电路中，电压和电流的象函数一般形式为

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}$$

式中 m 、 n 为正整数，且在电路分析中有 $n \geq m$ 。

部分分式展开法就是把上式分解为若干个如表14-1所示的简单函数之和，然后逐个求得反变换。

当 $n > m$ 时， $F(s)$ 为真分式；

当 $n = m$ 时，用多项式除法将其化为： $F(s) = A + \frac{N_0(s)}{D(s)}$

部分分式为真分式时，需对分母多项式作因式分解，求出 $D(s)=0$ 的根。分三种情况讨论。

情况1 $D(s)=0$ 只有单根

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_n 为 $D(s)=0$ 的 n 个不同单根，它们可以是实数，也可以是(共轭)复数。

K_1 、 K_2 、 \dots 、 K_n 为待定系数。确定方法如下：

方法1：按 $K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)F(s)$ 来确定， $i=1,2,3,\dots,n$

方法2：用求极限方法确定 K_i 的值。

$$\text{按 } K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)N'(s)+N(s)}{D'(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

$$i=1,2,3,\dots,n$$

P352 例14-6 求 $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$ 的原函数。

解： $s^3+7s^2+10s=0$ 的根分别为： $p_1=0, p_2=-2, p_3=-5$

用 $K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)F(s)$ 确定系数。

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s} = 0.1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} = 0.5$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -5} (s+5)F(s) = \lim_{s \rightarrow -5} (s+5) \frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)} = -0.6$$

$$F(s) = \frac{0.1}{s} + \frac{0.5}{s+2} + \frac{-0.6}{s+5}$$

$$f(t) = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t}$$

在情况1中，若 $D(s)=0$ 有共轭复根

$$p_1=\alpha+j\omega, \quad p_2=\alpha-j\omega$$

原则上也是上述方法，只是运算改为复数运算：

$$K_1=\frac{N(\alpha+j\omega)}{D'(\alpha+j\omega)} \quad K_2=\frac{N(\alpha-j\omega)}{D'(\alpha-j\omega)}$$

由于 $F(s)$ 是实系数多项式之比，故 K_1 、 K_2 必是**共轭复数**(证明从略)，即

若 $K_1=|K_1| e^{j\theta_1}$ ，则必有 $K_2=|K_1| e^{-j\theta_1}$

$$\begin{aligned} f(t) &= K_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + K_2 e^{(\alpha-j\omega)t} = |K_1| e^{j\theta_1} e^{(\alpha+j\omega)t} + |K_1| e^{-j\theta_1} e^{(\alpha-j\omega)t} \\ &= |K_1| e^{\alpha t} [e^{j(\theta_1+\omega t)} + e^{-j(\theta_1+\omega t)}] \end{aligned}$$

根据欧拉公式得： $f(t) = 2|K_1| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_1)$

P353 例14-7 求 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解：求 $s^2+2s+5=0$ 的根

$$p_1 = -1 + j2, \quad p_2 = -1 - j2 \longrightarrow \alpha = -1, \quad \omega = 2$$

$$K_1 = \frac{N(-1+j2)}{D'(-1+j2)} = 0.5 - j0.5 = 0.5\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$|K_1| = 0.5\sqrt{2} \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

代入： $f(t) = 2|K_1| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_1)$ 得

$$f(t) = \sqrt{2} e^{-t} \cos(2t - \frac{\pi}{4})$$

情况2: 如果 $D(s)=0$ 有 q 重根(设 p_1 有 q 重根)。

则 $D(s)$ 中含有 $(s-p_1)^q$ 的因式, $F(s)$ 的展开式为

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^q}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{q-1}}+\dots+\frac{K_{1q}}{s-p_1}+\sum_{i=1}^{n-q}\frac{K_{i+1}}{s-p_{i+1}}$$

系数 K_{i+1} 的求法同上, $K_{11}\sim K_{1q}$ 的确定:

$$K_{11}=\lim_{s\rightarrow p_1}(s-p_1)^q F(s) \quad K_{12}=\lim_{s\rightarrow p_1}\frac{d}{ds}[(s-p_1)^q F(s)]$$

$$K_{1q}=\frac{1}{(q-1)!}\lim_{s\rightarrow p_1}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}[(s-p_1)^q F(s)]$$

$$f(t)=\left[\frac{K_{11}}{(q-1)!}t^{q-1}+\frac{K_{12}}{(q-2)!}t^{q-2}+\dots+K_{1q}\right]e^{p_1t}+\sum_{i=1}^{n-q}K_{i+1}e^{p_{i+1}t}$$

$$K_{1q} = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} [(s-p_1)^q F(s)]$$

P354例14-8 求 $F(s) = \frac{1}{s^2 (s+1)^3}$ 的原函数。 解：

$$(s+1)^3 F(s) = \frac{1}{s^2}$$

求 K_{21} 、 K_{22} 的方法相同：

$$K_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s^2} = 1$$

$$s^2 F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$K_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} = 2$$

$$K_{21} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)^3} = 1$$

$$K_{13} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s^2} = 3$$

$$K_{22} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^3} = -3$$

$$f(t) = \frac{1}{2!} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-t} + t - 3$$

§ 14-4 运算电路

- 用拉氏变换求解线性电路的方法称为**运算法**。
- 运算法的思想是：**首先找出电压、电流的像函数表示式，而后找出 R 、 L 、 C 单个元件的电压电流关系的像函数表示式，以及基尔霍夫定律的像函数表示式，得到用像函数和运算阻抗表示的运算电路图，列出复频域的代数方程，最后求解出电路变量的象函数形式，通过拉氏反变换，得到所求电路变量的时域形式。
- 显然**运算法与相量法**的基本思想类似，因此，用相量法分析计算正弦稳态电路的那些方法和定理在形式上均可用于运算法。

1. KL的运算形式

☞ 对KL的时域形式取拉氏变换并应用其线性性质
可得KL在复频域中的运算形式：

$$\mathcal{L} [\sum i(t)] = \sum \mathcal{L} [i(t)] = \sum I(s) = 0$$

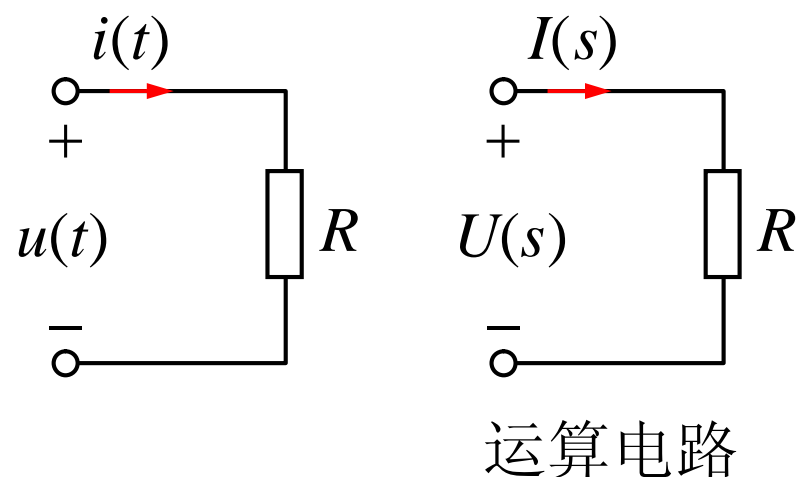
$$\mathcal{L} [\sum u(t)] = \sum \mathcal{L} [u(t)] = \sum U(s) = 0$$

2. VCR的运算形式

(1) 电阻 R

时域形式： $u(t) = Ri(t)$

运算形式： $U(s) = RI(s)$



(2) 电感 L

时域形式 $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

取拉氏变换并应用线性和微分性质
得运算形式: $U(s) = sLI(s) - Li(0_-)$

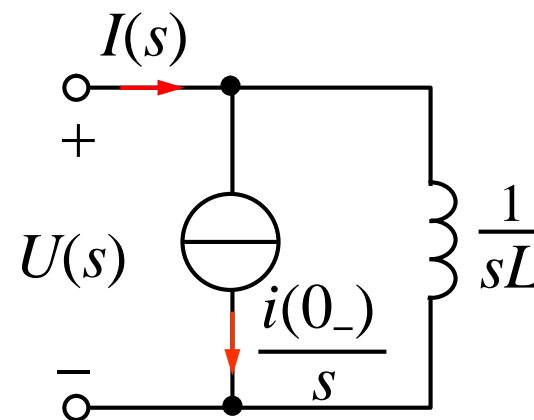
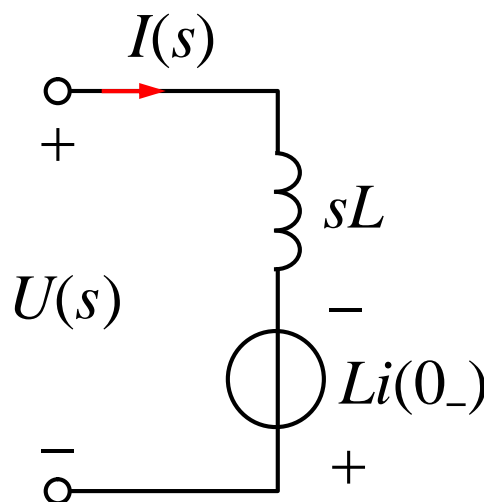
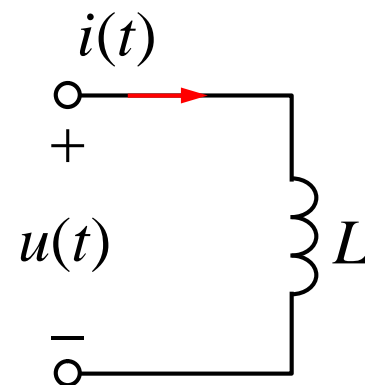
或者写为: $I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0_-)}{s}$

sL 称为 L 的运算阻抗

$1/sL$ 称为运算导纳

$i(0_-)$ 为 L 的初始电流

由上式得电感 L 的
运算电路如图。



(3) 电容 C

时域形式: $u(t) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(t) dt + u(0_-)$

取拉氏变换并应用线性和积分性质

得运算形式: $U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$

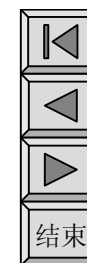
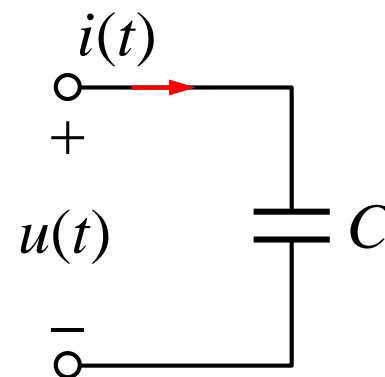
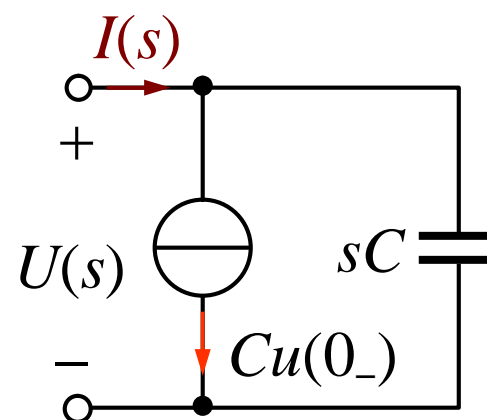
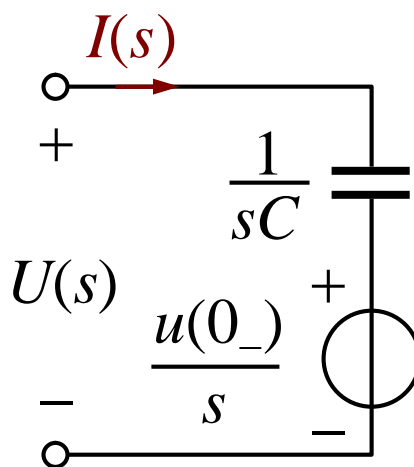
或者写为: $I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$

$1/sC$ 称为 C 的运算阻抗。

sC 为 C 的运算导纳。

$u(0_-)$ 为 C 的初始电压。

运算电路如图。



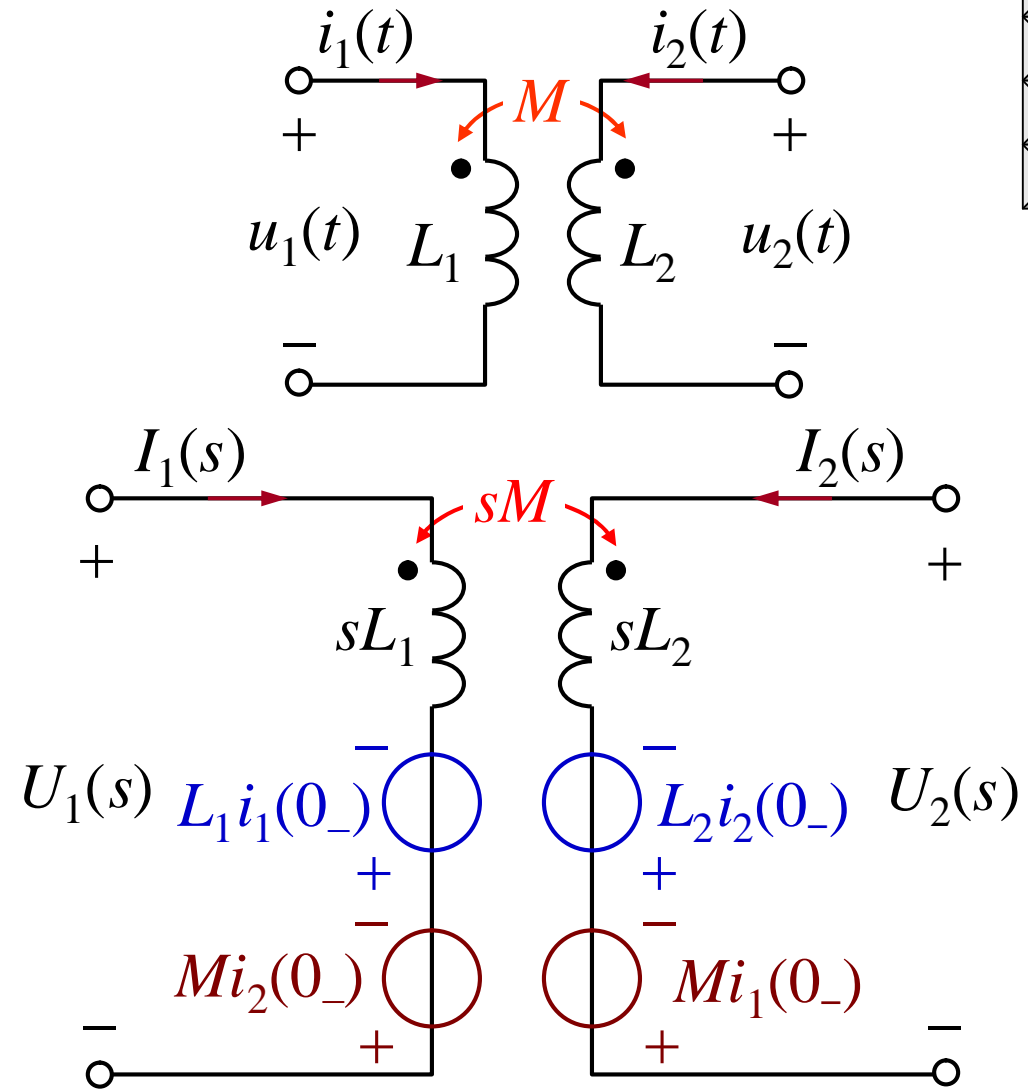
(4) 耦合电感

电压电流关系为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\}$$

两边取拉氏变换，
得耦合电感 VCR
的运算形式。

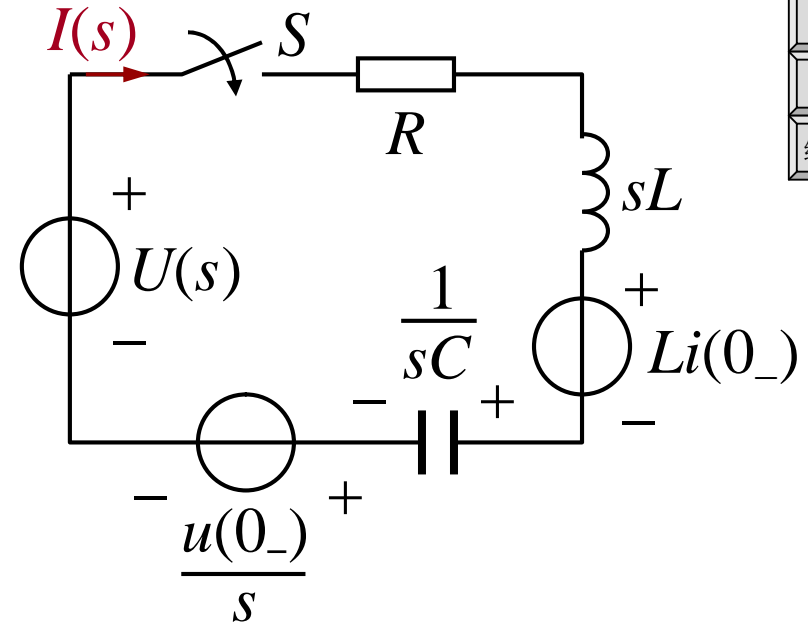
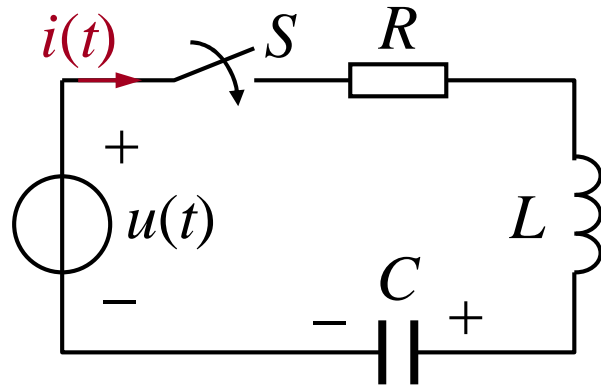
由运算形式得耦合
电感的运算电路图



$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + sM I_2(s) - M i_2(0_-)$$

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + sM I_1(s) - M i_1(0_-)$$

(5) 运算电路模型



设电容电压的初值为 $u(0_-)$

电感电流的初值为 $i(0_-)$

时域方程为 $u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i \, dt$ 取拉氏变换得

$$U(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0_-) + \frac{1}{sC} I(s) - \frac{u(0_-)}{s}$$

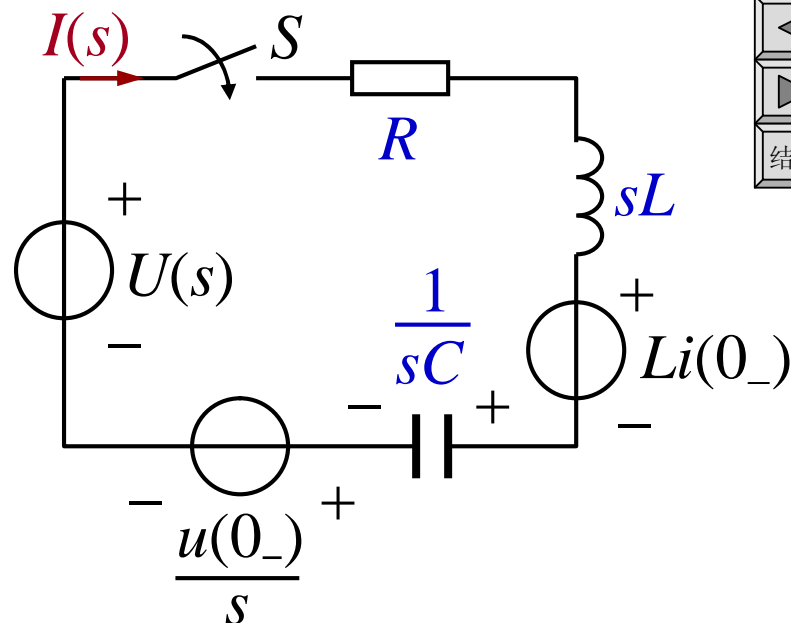
$$(R + sL + \frac{1}{sC}) I(s) = Z(s) I(s) = U(s) + Li(0_-) + \frac{u(0_-)}{s}$$

由上式得运算电路。

$Z(s) = (R + sL + \frac{1}{sC})$ 称运算阻抗

运算电路实际是：

- ①电压、电流用象函数形式；
- ②元件用运算阻抗或运算导纳表示；
- ③电容电压和电感电流初始值用附加电源表示。



友情提示

- ✎ 运算法可直接求得全响应；
- ✎ 用 0_- 初始条件，跃变情况自动包含在响应中。

§ 14-5 应用拉氏变换法分析线性电路

相量法由电阻电路推广而来，运算法也是。

所以运算法的分析思路与相量法非常相似：

推广时引入拉氏变换和运算阻抗的概念：

$$i \rightarrow I(s) \quad u \rightarrow U(s) \quad R \rightarrow Z(s) \quad G \rightarrow Y(s)$$

⦿ 用运算法分析动态电路的步骤：

- ① 求初始值；
- ② 将激励变换成象函数；
- ③ 画运算电路(注意附加电源的大小和方向)；
- ④ 用电阻电路的方法和定理求响应的象函数；
- ⑤ 求原函数得时域形式的表达式。

P359 例14-9 电路处于稳态。

$t=0$ 时S闭合，求 $i_1(t)$ 。

解：求初值：

$$i_L(0_-) = 0, \quad U_C(0_-) = U_S = 1\text{V}$$

求激励的象函数：

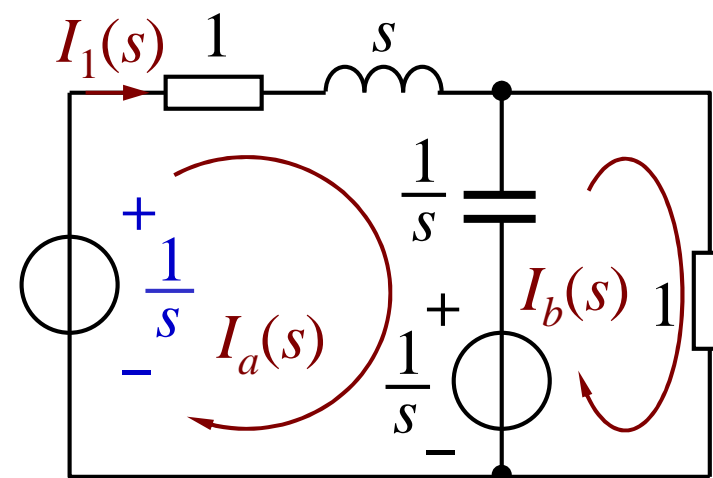
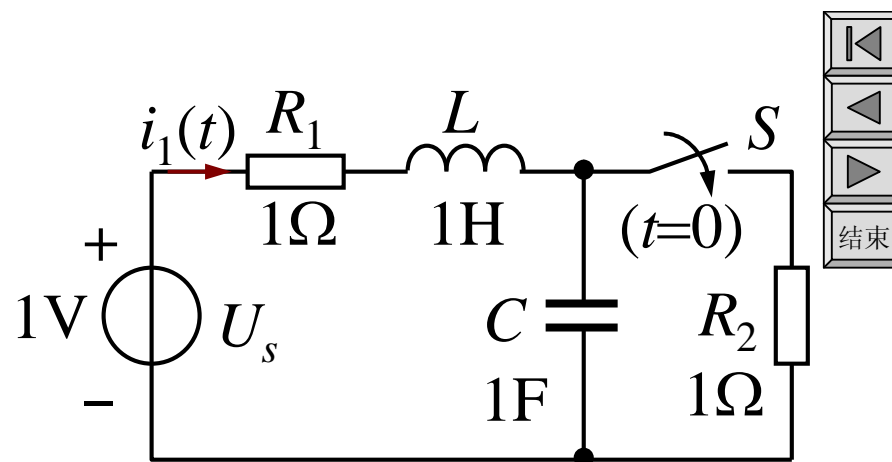
$$\mathcal{L}[U_S] = \mathcal{L}[1] = 1/s$$

画运算电路：

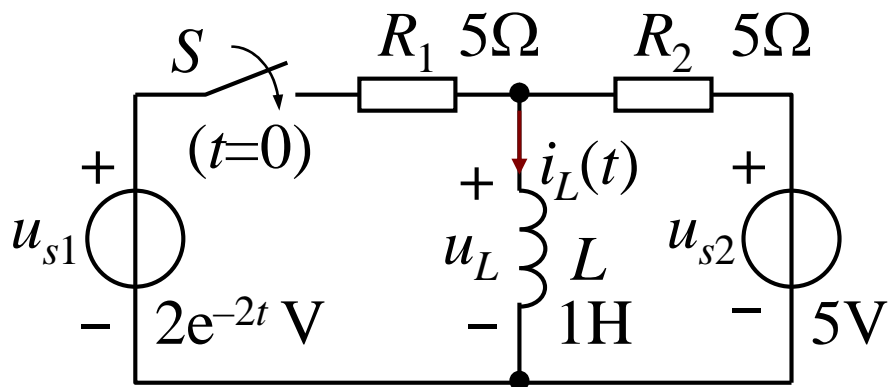
用回路电流法求响应的象函数：

$$\left. \begin{aligned} \left(1+s+\frac{1}{s}\right) I_a(s) - \frac{1}{s} I_b(s) &= 0 \\ -\frac{1}{s} I_a(s) + \left(1+\frac{1}{s}\right) I_b(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \rightarrow I_1(s) = I_a(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$$

求原函数： $\mathcal{L}[I_1(s)] = \frac{1}{2} (1 + e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) \text{ A}$



P361 例14-11 稳态时闭合S。求 $t \geq 0$ 时的 $u_L(t)$ 。



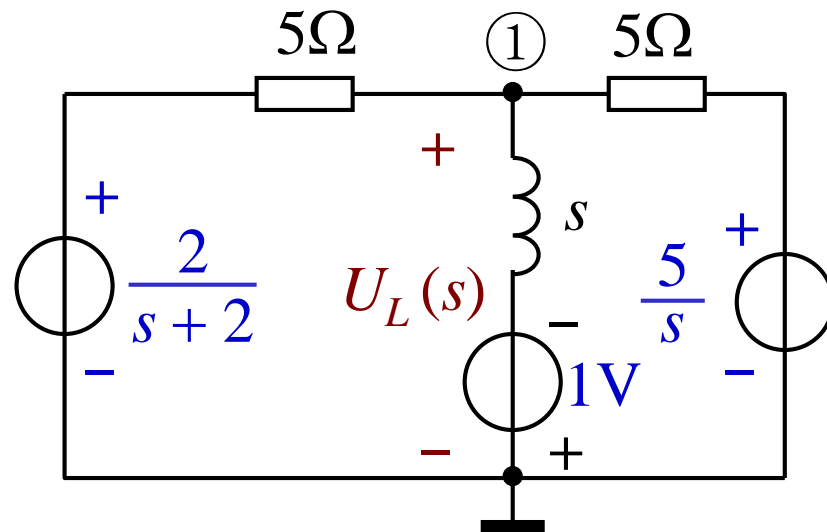
解: $i_L(0_-) = \frac{u_{s2}}{R_2} = 1\text{A}$

$$\mathcal{L}[2e^{-2t}] = \frac{2}{s+2} \quad \mathcal{L}[5] = \frac{5}{s}$$

由结点电压法

$$\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{s} \right] U_{n1}(s) = \frac{\frac{2}{s+2}}{5} - \frac{1}{s} + \frac{5}{s}$$

$$\frac{2s+5}{5s} U_{n1}(s) = \frac{2}{5(s+2)}$$

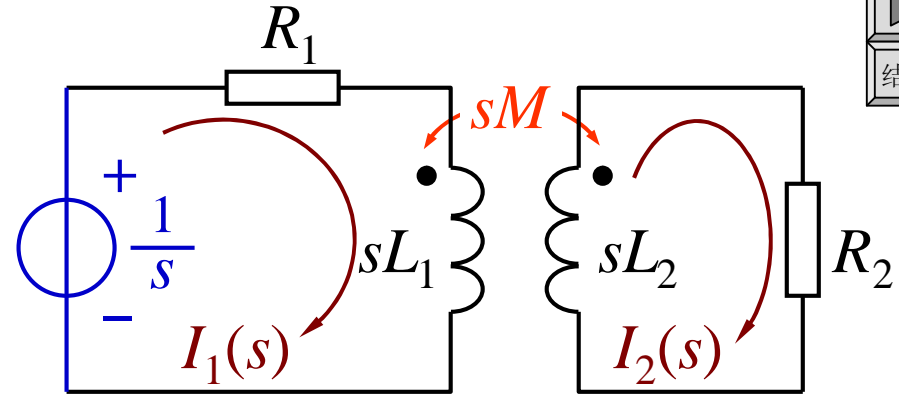
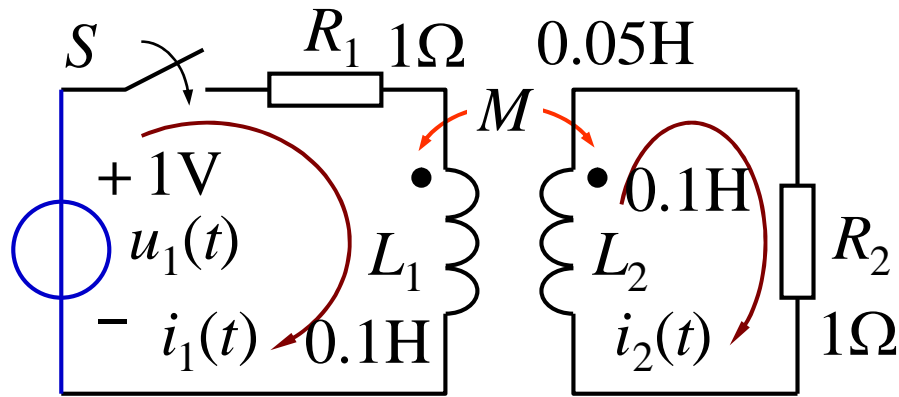


$$\begin{aligned} U_L(s) &= U_{n1}(s) \\ &= \frac{2s}{(s+2)(2s+5)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[U_L(s)] = (-4e^{-2t} + 5e^{-2.5t})\text{V}$$



P362 例14-12 求S闭合时的 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。



解：根据运算电路

列回路电流方程

$$(R_1 + sL_1)I_1(s) - sMI_2(s) = (1/s)$$

$$-sMI_1(s) + (R_2 + sL_2)I_2(s) = 0$$

代入数据

$$(1 + 0.1s)I_1(s) - 0.05sI_2(s) = (1/s)$$

$$-0.05sI_1(s) + (1 + 0.1s)I_2(s) = 0$$

解方程

$$I_1(s) = \frac{0.1s + 1}{s(7.5 \times 10^3 s^2 + 0.2s + 1)}$$

$$I_2(s) = \frac{0.05}{s(7.5 \times 10^3 s^2 + 0.2s + 1)}$$

取反变换

$$i_1(t) = (1 - 0.5e^{-6.67t} - 0.5e^{-20t})\text{A}$$

$$i_2(t) = 0.5(0.5e^{-6.67t} - e^{-20t})\text{A}$$

P363 例14-13 电路处于稳态时打开S。求 $i(t)$ 和电感元件电压。

解： $\mathcal{L}[10]=(10/s)$,

$$i_{L1}(0_-)=5\text{A}, L_1 i_{L1}(0_-)=1.5\text{V}$$

$$I(s)=\frac{\frac{10}{s}+1.5}{2+3+(0.3+0.1)s}=\frac{(1.5s+10)}{s(0.4s+5)}=\frac{2}{s}+\frac{1.75}{s+12.5}$$

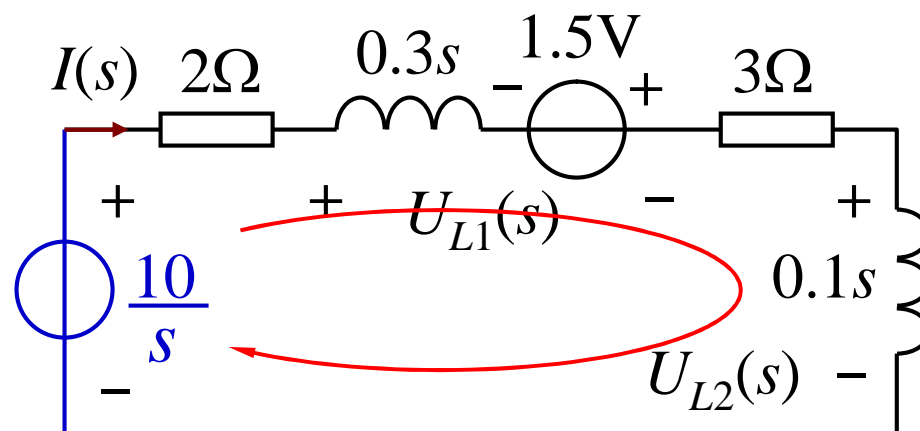
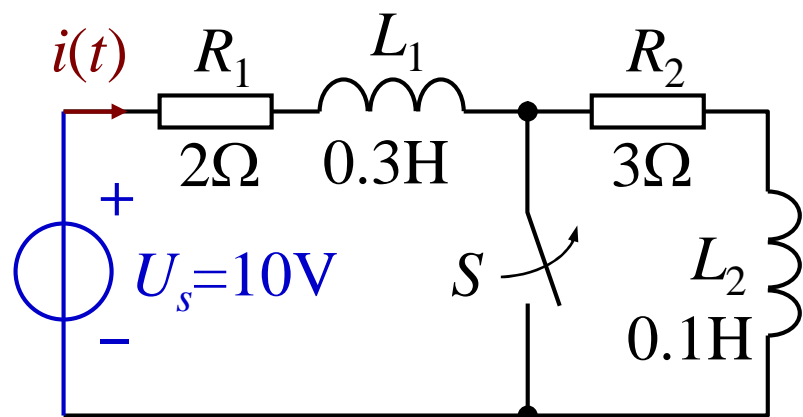
$$i(t)=(2+1.75e^{-12.5t})\text{A}$$

$$U_{L1}(s)=0.3sI(s)-1.5=-\frac{6.56}{s+12.5}-0.375$$

$$U_{L2}(s)=0.1sI(s)=-\frac{2.19}{s+12.5}-0.375$$

$$u_{L1}(t)=[-6.56e^{-12.5t}-0.375\delta(t)]\text{V}$$

$$u_{L2}(t)=[-2.19e^{-12.5t}+0.375\delta(t)]\text{V}$$

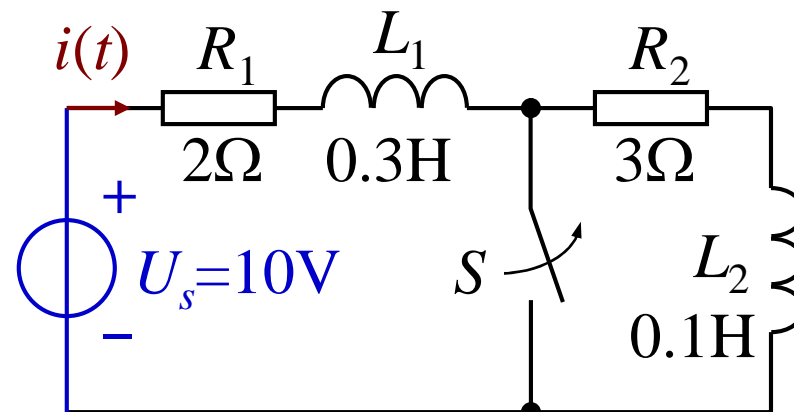


$$i_{L1}(0_-)=5\text{A}$$

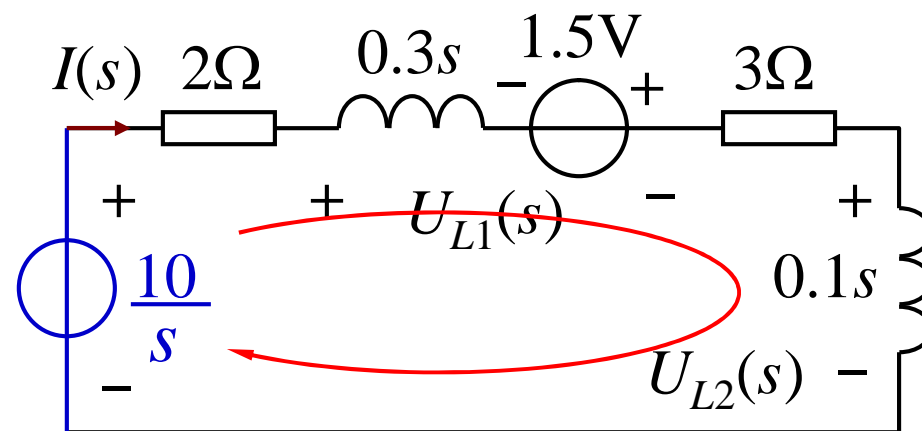
$$i(t)=(2+1.75e^{-12.5t})\text{A}$$

$$u_{L1}(t)=[-6.56e^{-12.5t}-0.375\delta(t)]\text{V}$$

$$u_{L2}(t)=[-2.19e^{-12.5t}+0.375\delta(t)]\text{V}$$



☞ S打开瞬间 $i_{L1}(0_+)=3.75\text{A}$
 电流发生了跃变。 $u_{L1}(t)$ 、 $u_{L2}(t)$ 中将出现冲激电压。



💡 但 $u_{L1}(t)+u_{L2}(t)$ 无冲激，
 回路满足KVL。

可见拉氏变换已自动
 把冲激函数计入在内。

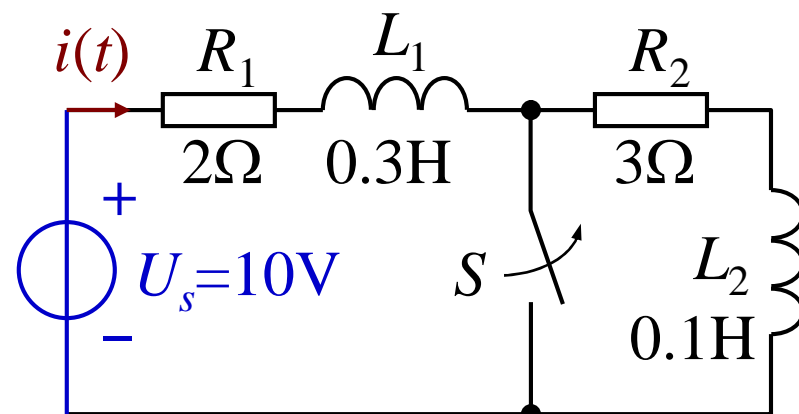
💡 所以，当分析 $i_L(t)$ 或 $u_C(t)$
 有跃变情况的问题时，
 运算法不易出错。

$$i_{L1}(0_-)=5\text{A}$$

$$i(t)=(2+1.75e^{-12.5t})\text{A}$$

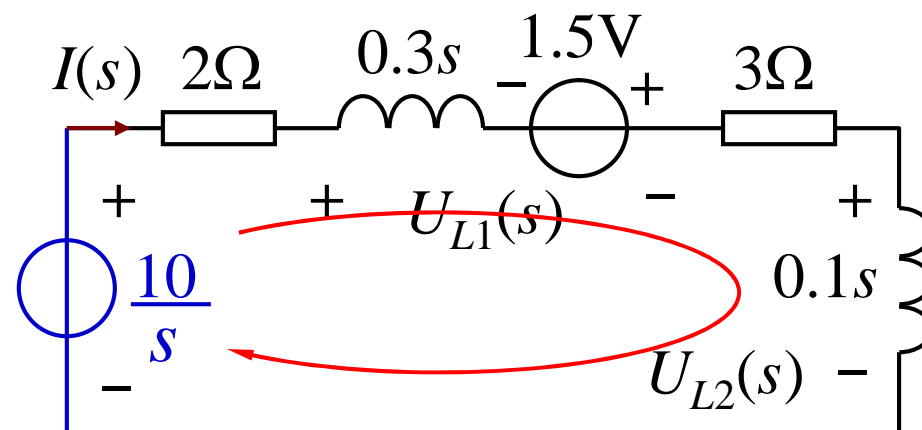
$$u_{L1}(t)=[-6.56e^{-12.5t}-0.375\delta(t)]\text{V}$$

$$u_{L2}(t)=[-2.19e^{-12.5t}+0.375\delta(t)]\text{V}$$



提示

本例在求出 $i(t)$ 后，不要轻易采用对 $i(t)$ 求导的方法计算 $u_{L1}(t)$ 和 $u_{L2}(t)$ ，这会丢失冲激函数项。



加 $\varepsilon(t)$ 后再求导，也会产生错误结果。因为 $\varepsilon(t)$ 的起始性把函数定义成 $t<0$ 时为0。所以当电压或电流不为0时，一般不能在表达式中随意加 $\varepsilon(t)$ 。

经典法有一定的局限性。

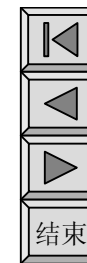
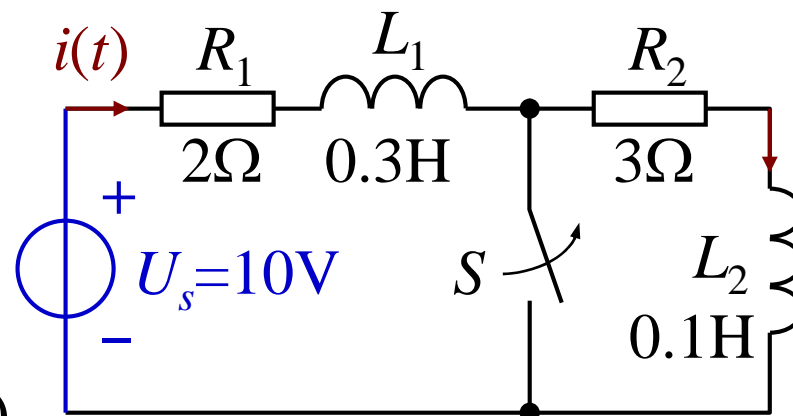
若要求用三要素法求解，
则按磁链不变原则有：

$$L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-) = (L_1 + L_2) i(0_+)$$

$$i(0_+) = \frac{L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-)}{L_1 + L_2}$$
$$= \frac{0.3 \times 5 + 0}{0.3 + 0.1} = 3.75 \text{ A}$$

$$i(\infty) = \frac{10}{2+3} = 2 \text{ A}$$

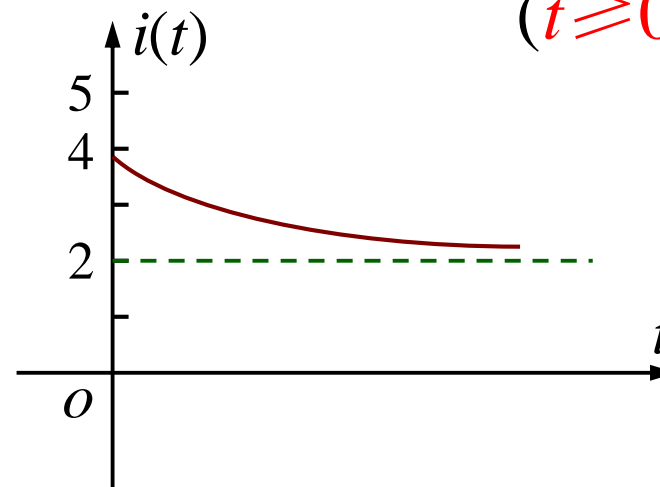
$$\tau = \frac{0.3+0.1}{2+3} = \frac{1}{12.5} \text{ s}$$



代入三要素公式得：

$$i(t) = 2 + (3.75 - 2)e^{-12.5t} \text{ A}$$

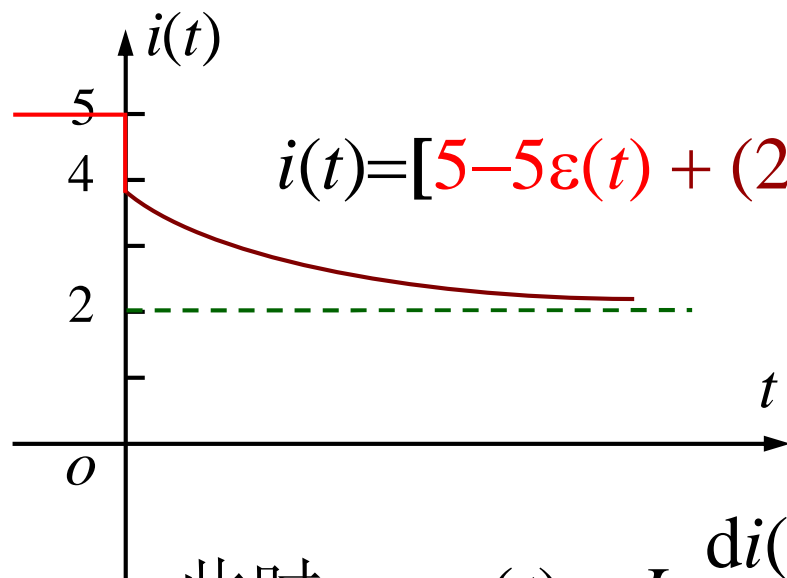
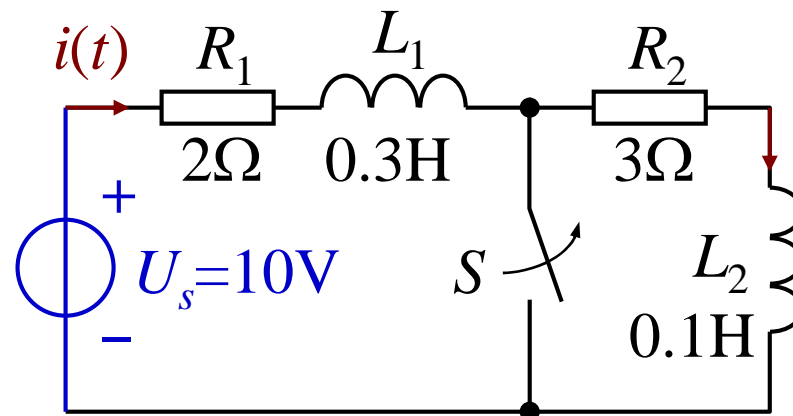
$(t \geq 0_+)$



$$i(0_-) = i_{L1}(0_-) = 5\text{A}$$

$$i(t) = 2 + (3.75 - 2)e^{-12.5t} \text{ A}$$

为表示 $t \geq 0_-$ 的情况



$$i(t) = [5 - 5\varepsilon(t) + (2 + 1.75e^{-12.5t})\varepsilon(t)] \text{ A}, \quad (t \geq 0_-)$$

此时: $u_{L1}(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} = [-6.56e^{-12.5t} - 0.375\delta(t)] \text{ V}$

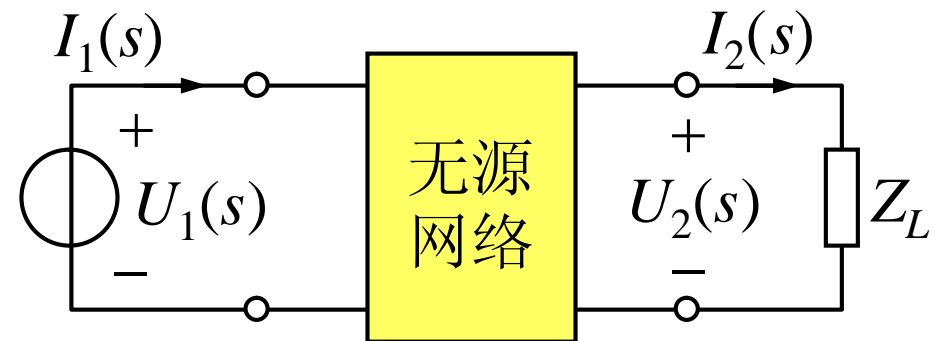
§ 14-6 网络函数的定义

1. 网络函数的定义

若电路在单一独立源激励下，其零状态响应 $r(t)$ 的象函数为 $R(s)$ ，激励 $e(t)$ 的象函数为 $E(s)$ ，

则该电路的网络函数 $H(s)$ 定义为 $R(s)$ 与 $E(s)$ 之比。

$$\text{即 } H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R(s)}{E(s)}$$



2. 网络函数的类型

根据激励 $E(s)$ 与响应

$R(s)$ 所在的端口： $H(s)$ 可以是驱动点阻抗、导纳；

电压转移函数、电流转移函数；

转移阻抗、转移导纳。

注意

✎ 若激励 $E(s) = 1$ ，即 $e(t) = \delta(t)$ ，
则响应 $R(s) = H(s)E(s) = H(s)$ 。

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = r(t)$$

说明网络函数的原函数为电路的单位冲激响应。

或者说，如果已知电路某一处的单位冲激响应 $h(t)$ ，就可通过拉氏变换得到该响应的网络函数

✎ 网络函数仅与网络的结构和电路参数有关，与激励的函数形式无关。因此，如果已知某一响应的网络函数 $H(s)$ ，它在某一激励 $E(s)$ 下的响应 $R(s)$ 就可表示为 $R(s) = H(s)E(s)$

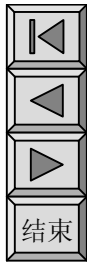
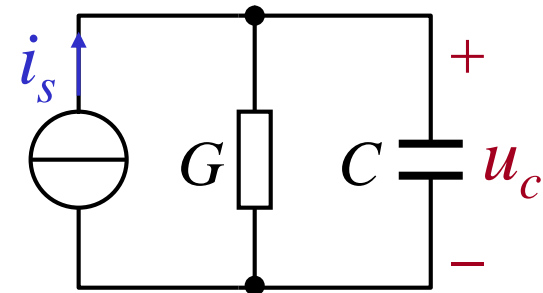
P366例14-15 已知激励 $i_s = \delta(t)$
求冲激响应 $h(t) = u_c(t)$

解：激励与响应属同一端口

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{U_c(s)}{I_s(s)} = Z(s) \quad \text{为驱动点阻抗。}$$

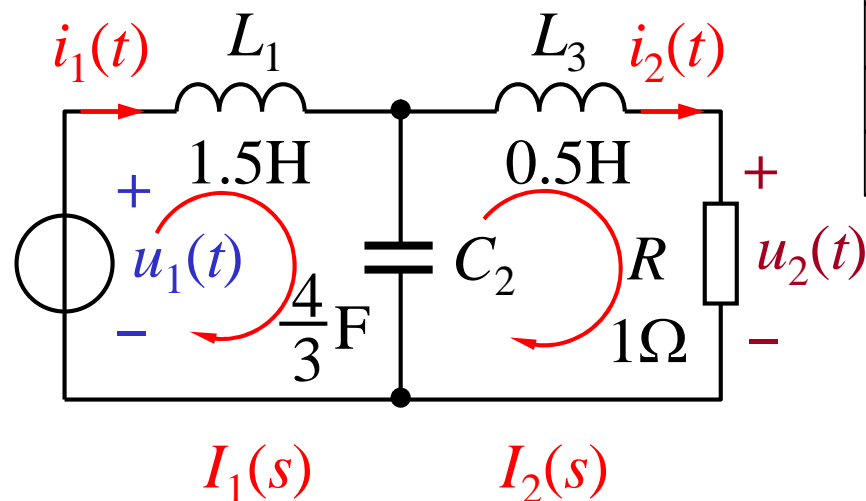
$$Z(s) = \frac{1}{G + sC} = \frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



P366 例14-16

已知低通滤波器的参数
当激励是电压 $u_1(t)$ 时，
求电压转移函数和驱动
点导纳函数。



解：用回路电流法

$$(sL_1 + \frac{1}{sC_2})I_1(s) - \frac{1}{sC_2}I_2(s) = U_1(s)$$

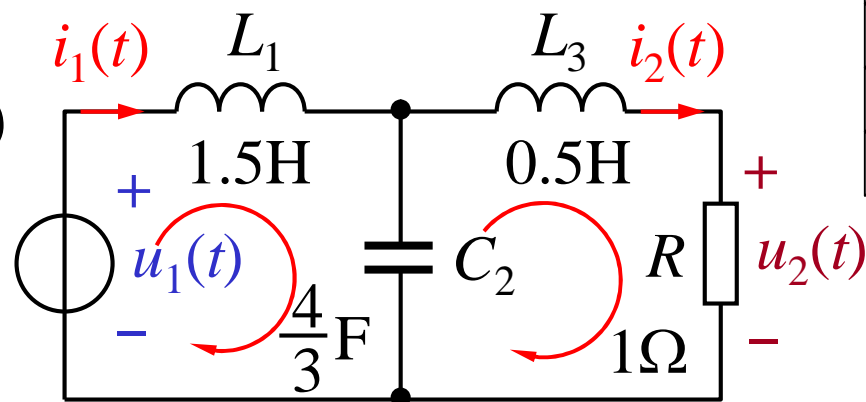
$$-\frac{1}{sC_2}I_1(s) + (sL_3 + \frac{1}{sC_2} + R)I_2(s) = 0$$

解方程得：

$$I_1(s) = \frac{L_3 C_2 s^2 + R C_2 s + 1}{D(s)} U_1(s) \quad I_2(s) = \frac{1}{D(s)} U_1(s)$$

$$I_1(s) = \frac{L_3 C_2 s^2 + R C_2 s + 1}{D(s)} U_1(s)$$

$$I_2(s) = \frac{1}{D(s)} U_1(s)$$



式中： $D(s) = L_1 L_3 C_2 s^3 + R L_1 C_2 s^2 + (L_1 + L_2) s + R$

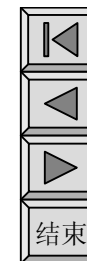
代入数据： $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

$U_2(s) = R I_2(s) = I_2(s)$ 电压转移函数为：

$$H_1(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

驱动点导纳函数为：

$$H_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 3}{3(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}$$



§ 14-7 网络函数的极点和零点

- ✎ 由于 $H(s)$ 定义为响应与激励之比，所以 $H(s)$ 只与(网络)电路参数有关。在 $H(s)$ 中不会包含激励的象函数。
- ✎ 对于由 R 、 $L(M)$ 、 C 和受控源组成的电路来说， $H(s)$ 是 s 的实系数有理函数，其分子、分母多项式的根或是实数或是(共轭)复数。

1. $H(s)$ 的一般形式

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

写成

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2) \cdots (s-z_i) \cdots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_j) \cdots (s-p_n)}$$

$$= H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad H_0 \text{为常数}$$

$z_1、z_2、\cdots z_m$ 是 $N(s)=0$ 的根，

当 $s=z_i$ 时， $H(s)=0$ ，称之为网络函数的**零点**；

$p_1、p_2、\cdots p_m$ 是 $D(s)=0$ 的根，

当 $s=p_i$ 时， $H(s) \rightarrow \infty$ ，称之为网络函数的**极点**。

2. 网络函数的零、极点分布图

在 s 平面上, $H(s)$ 的零点用“○”表示, 极点用“×”表示。这样就可以得到网络函数的零、极点分布图。

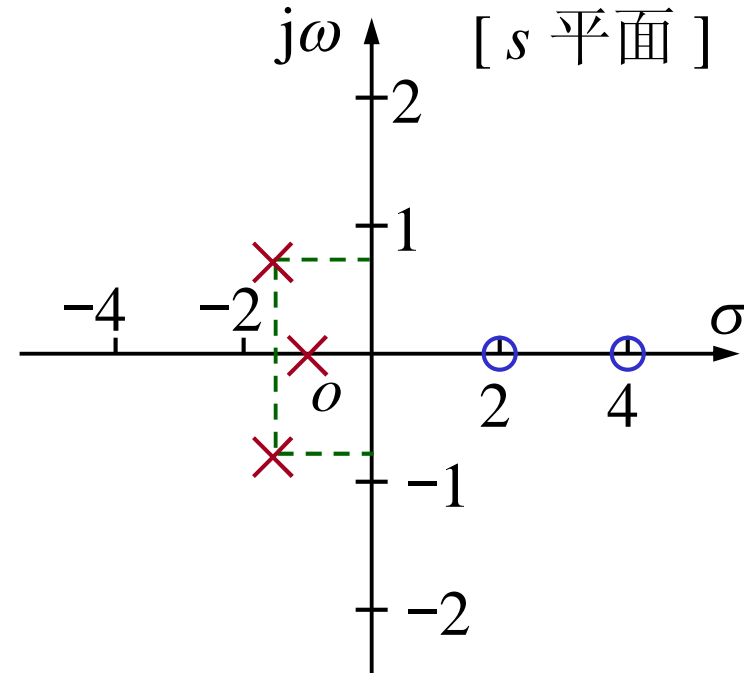
例: 求 $H(s) = \frac{2s^2 - 12s + 16}{s^3 + 4s^2 + 6s + 3}$

的零、极点图。

解: 对分子作因式分解 $2(s^2 - 6s + 8) = 2(s - 2)(s - 4)$

对分母作因式分解 $(s + 1)(s^2 + 3s + 3)$

$$= (s + 1) \left(s + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(s + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



§ 14-8 极点、零点与冲激响应

根据 $H(s)$ 的定义可知，电路的零状态响应为：

$$R(s) = H(s) E(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$H(s)$ 、 $E(s)$ 的分子和分母都是 s 的多项式， $D(s)Q(s)=0$ 的根将包含 $D(s)=0$ 和 $Q(s)=0$ 的根。

$Q(s)=0$ 的根与激励有关，属强制分量。

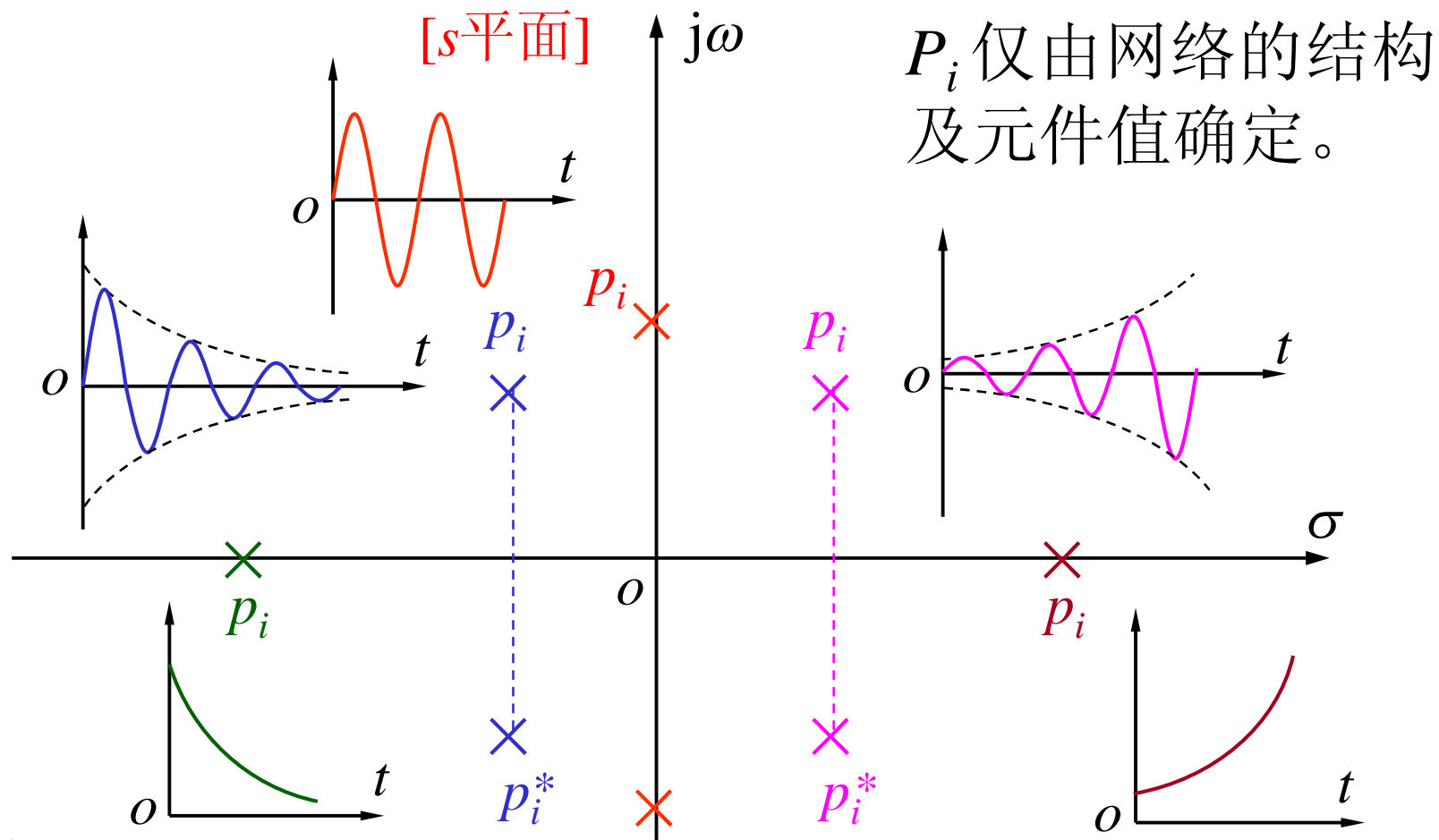
$D(s)=0$ 的根只与网络(电路)参数有关，是自由分量。

根据冲激响应过程可知， $h(t)$ 中只有自由分量，

而 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ 。所以，分析 $H(s)$ 的零、极点与冲激响应的关系，就能预见时域响应的特点。

设 $H(s)$ 为真分式，且分母 $D(s)=0$ 只有单根，则

$$\text{冲激响应 } h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \right] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$



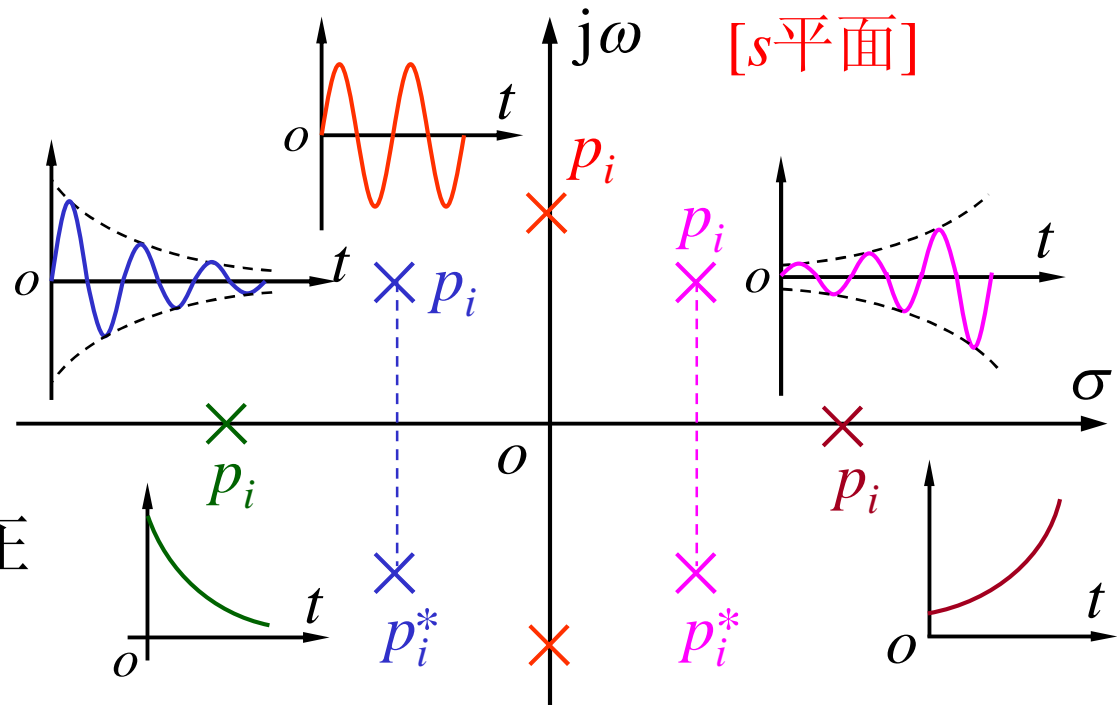
归纳如下:

若所有极点 全部在左半 s 平面, 则电路(或系统)是稳定的。

只要有一个极点 p_i 在右半 s 平面, 电路(或系统)不稳定。

若极点在虚轴上, 为临界稳定状态。

若极点在实轴上, 则响应按指数衰减或增长。(单调变化)



若极点不在实轴上, 一般为共轭复数, 则响应为正弦振荡: 衰减振荡, 或增幅振荡, 或等幅振荡。

P371 例14-18

根据 $H(s)$ 的极点分布情况
分析 $u_C(t)$ 的变化规律。

解： $U_S(s)$ 为激励，

$U_C(s)$ 为响应，

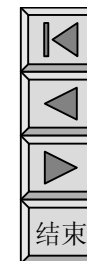
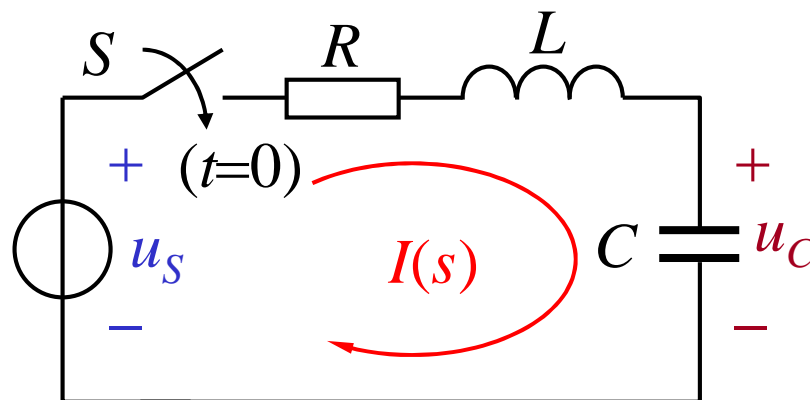
$H(s) = U_C(s)/U_S(s)$ 为电压转移函数：

$$U_C(s) = I(s) \frac{1}{sC} = \frac{U_S(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC} = \frac{U_S(s)}{s^2 LC + sRC + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{LC} \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} \quad p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

式中 p_1 、 p_2 分别为：

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$



$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_d = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

(1) 当 $0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

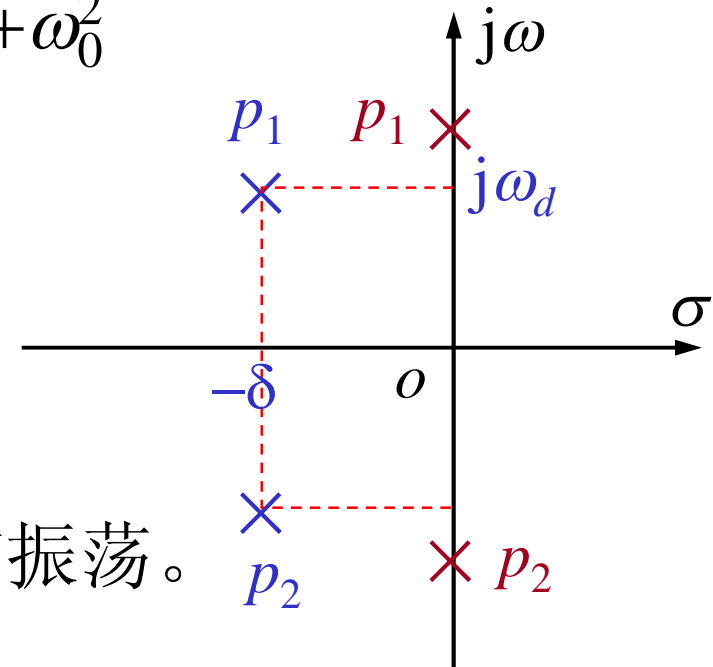
$$p_1 = -\delta + j\omega_d, \quad p_2 = -\delta - j\omega_d$$

极点位于左半 s 平面。

$u_C(t)$ 的自由分量为衰减的正弦振荡。

极点离虚轴越远，衰减越快。

极点离实轴远，振荡频率高。



(2) $R=0$, $p_1 = j\omega_d$, $p_2 = -j\omega_d$

极点位于虚轴，自由分量为等幅振荡。

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_d = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

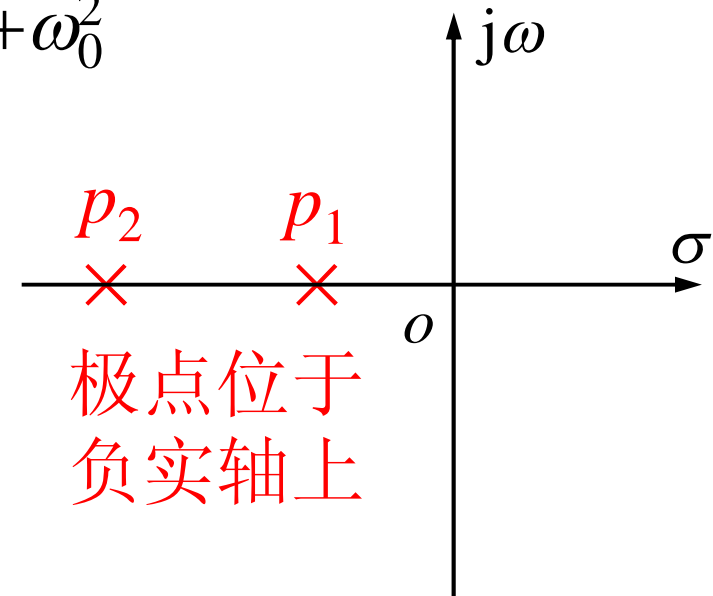
$$(3) R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

p_1 、 p_2 是两个不等的负实根。

$u_C(t)$ 的自由分量为两个衰减速度不同的指数项。

极点离原点越远，衰减越快。

$u_C(t)$ 中的强制分量取决于激励。



以上根据 $H(s)$ 的极点分布情况，**定性**地分析 $u_C(t)$ 的变化规律。

§ 14-9 极点、零点与频率响应

令网络函数 $H(s)$ 中复频率 $s=j\omega$ ，分析 $H(j\omega)$ 随 ω 变化的情况，就可预见相应的网络函数在正弦稳态情况下随 ω 变化的特性， $H(j\omega)$ 是一个复数。

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle \varphi(j\omega)$$

$|H(j\omega)|$ 为网络函数在频率 ω 处的模值， $|H(j\omega)|$ 随 ω 变化的关系为幅度频率响应，简称幅频特性；

$\varphi(j\omega)$ 为相位频率响应，简称相频特性。

$$\text{由于 } H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)}$$

所以幅频特性

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(j\omega - p_j)|}$$

相频特性

$$\begin{aligned} \varphi(j\omega) &= \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \arg(j\omega - p_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j \end{aligned}$$

具体分析方法

(1) 公式计算

若已知网络函数的零点、极点，则可以通过公式计算频率响应。

(2) 作图法

定性描绘频率响应曲线。

① Bode图；

② 几何求法。

举例如下：

例14-19 定性分析RC串联电路的频率特性, u_2 为输出。

解: (1)写频率特性表达式

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

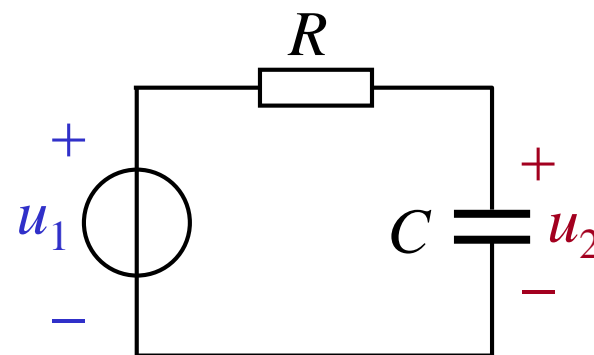
为电压转移函数。

$$\text{幅频特性: } |H(j\omega)| = \frac{H_0}{\left| j\omega + \frac{1}{RC} \right|}$$

相频特性:

$$\varphi(j\omega) = 0 - \theta(j\omega) = -\arctg(\omega RC)$$

(2)为绘制频率特性曲线,
需要求若干个点:



$$\omega=0: |H(j0)|=1$$

$$\varphi(j0)=0;$$

$$\omega = \omega_C = \frac{1}{RC}$$

$$|H(j\omega_C)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(j\omega_C) = -45^\circ;$$

$$\omega \rightarrow \infty: |H(j\infty)|=0$$

$$\varphi(j\infty) = -90^\circ.$$



用几何求法再算几个点：

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\left| j\omega + \frac{1}{RC} \right|} = \frac{H_0}{M(\omega)}$$

$$\varphi(j\omega) = -\theta(\omega) = -\arctg(\omega RC)$$

$$\omega = \omega_1: |H(j\omega_1)| = H_0/M_1$$

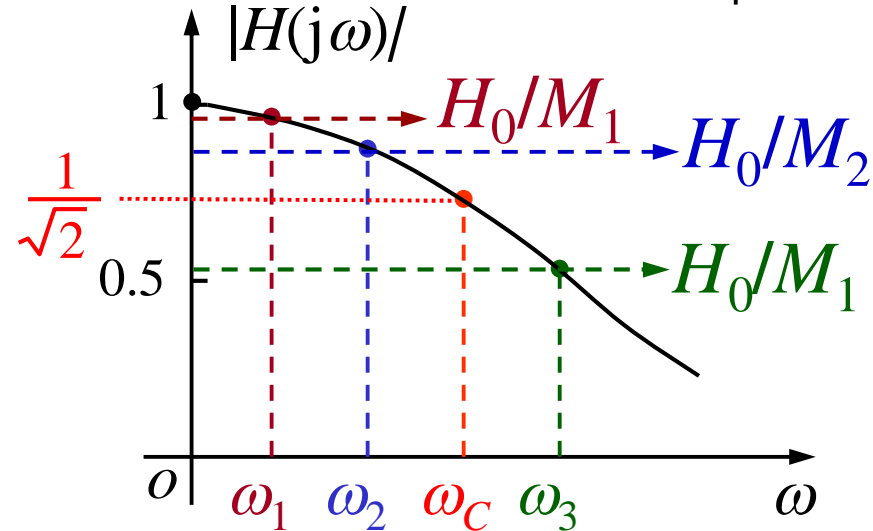
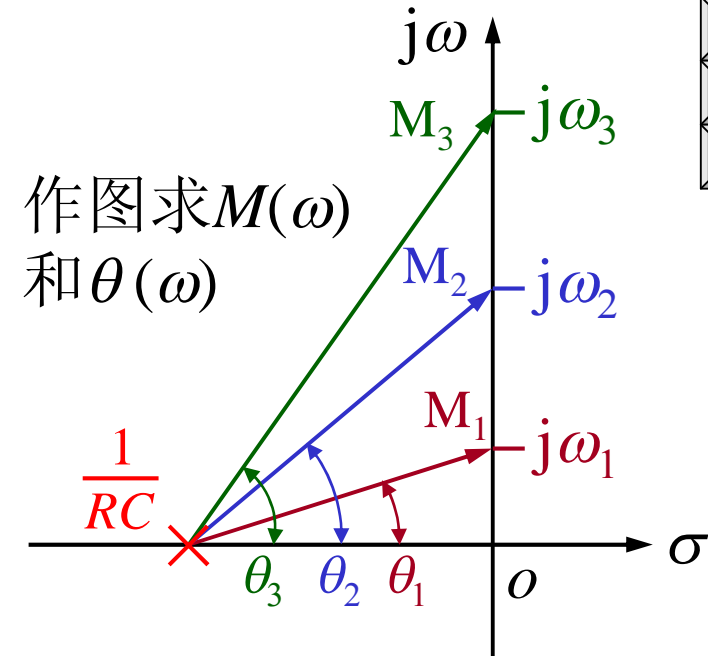
$$\varphi(j\omega_1) = -\theta_1$$

$$\omega = \omega_2: |H(j\omega_2)| = H_0/M_2$$

$$\varphi(j\omega_2) = -\theta_2$$

$$\omega = \omega_3: |H(j\omega_3)| = H_0/M_3$$

$$\varphi(j\omega_3) = -\theta_3$$



幅频特性

ω_C 称为截止频率。

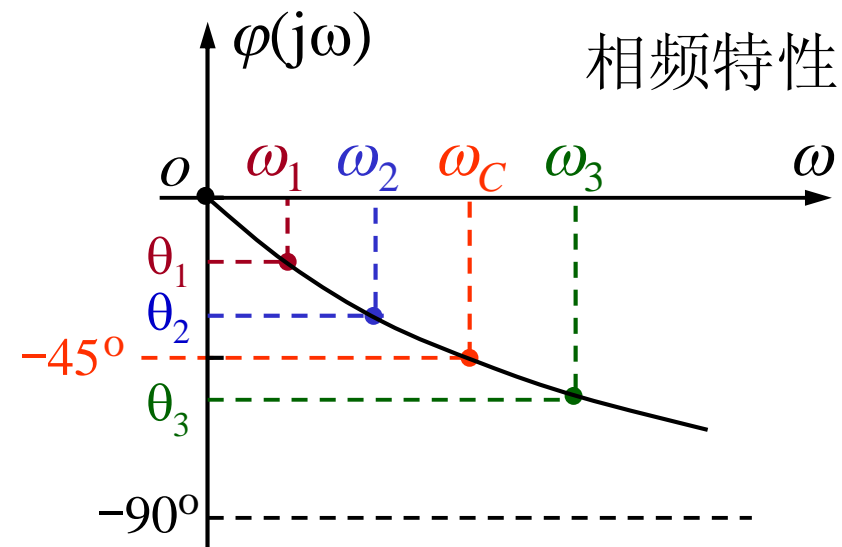
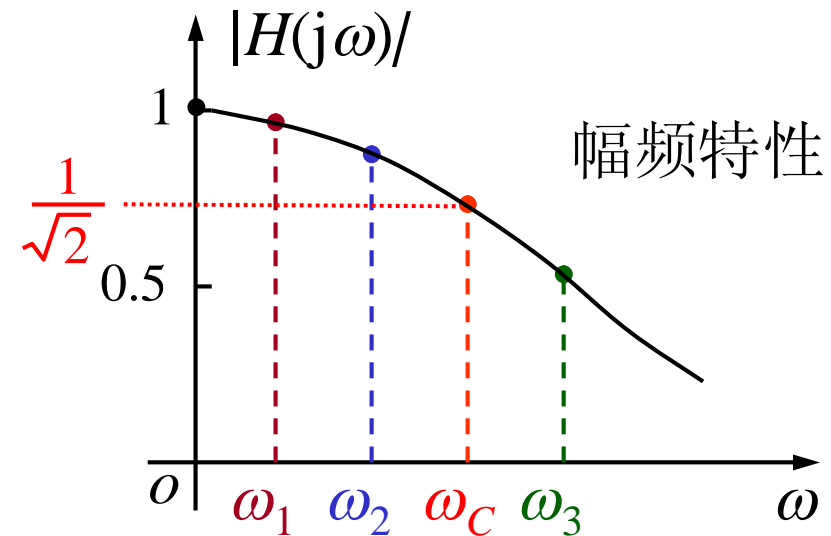
或转折频率。

该电路具有低通特性，
通频带为 $\omega_C - 0 = \omega_C$ 。

$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

采用几何求法，要按比例画图，然后量长度 $M(\omega)$ 和测角度 $\theta(\omega)$ 。此法虽不精确，但不用计算。

当需要较准的曲线时，
应多求一些点。



例14-20 RLC 串联电路的电压转移函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$,试根据其零、极点定性绘出 $H(j\omega)$ 。

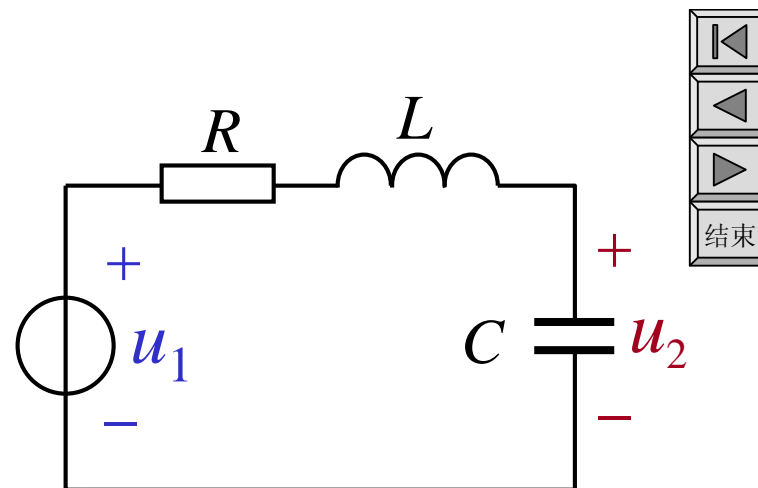
解：引用P371 例14-18的结果

$$H(s) = \frac{1}{LC} \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{H_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

为分析频率特性，令 $s=j\omega$ 得 $H(j\omega) = \frac{H_0}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)}$
式中无零点，极点为：

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

只讨论极点是一对共轭复数的情况。



一对共轭复数极点为： $p_1 = -\delta + j\omega_d$, $p_2 = -\delta - j\omega_d$
 δ 、 ω_d 、 ω_0 与电路参数的关系同前。

幅频特性表达式：

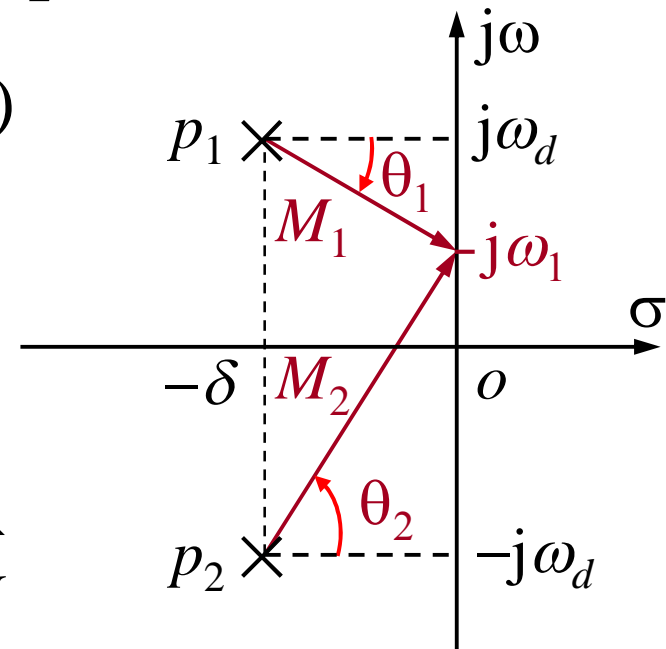
$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{|j\omega - p_1| |j\omega - p_2|} = \frac{H_0}{M_1(\omega) M_2(\omega)}$$

相频特性表达式： $\varphi(j\omega) = -(\theta_1 + \theta_2)$

$$\omega = \omega_1: |H(j\omega_1)| = \frac{H_0}{M_1 M_2}$$

$$\varphi(j\omega_1) = -(-\theta_1 + \theta_2)$$

$\omega = \omega_2$, ...。用几何求法的作图过程，与例14-19相同，不再重复。



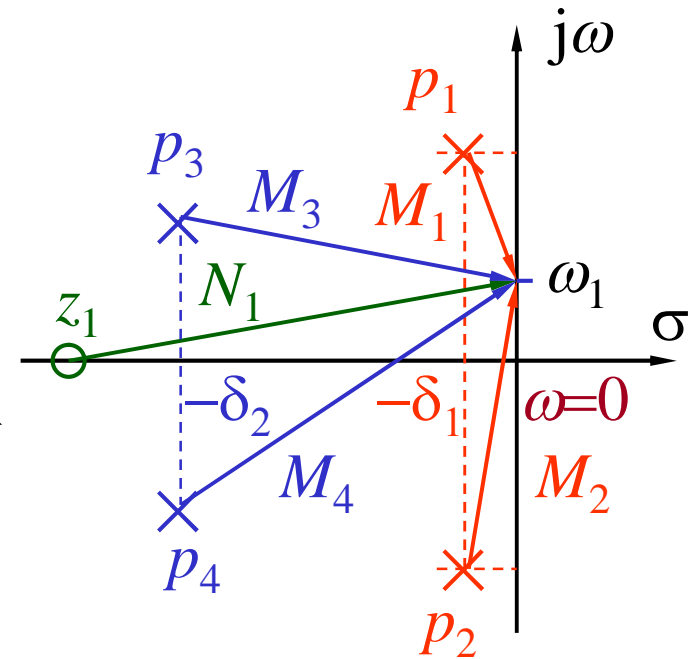
主导极点的概念

对频率特性影响最大，或者说起主要作用的极点。

$$|H(j\omega_1)| = \frac{N_1}{M_1 M_2 M_3 M_4}$$

$$|\varphi(j\omega_1)| = \varphi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

一对共轭复数极点靠近虚轴，且周围无零点，其它极点与虚轴的距离大于这对极点5倍以上。那么靠近虚轴的这对共轭复数极点对频率特性影响大。



从图中看出，当 ω 变化时，对 M_1 、 M_2 和 θ_1 、 θ_2 的影响较大，而影响最大的是 M_1 和 θ_1 。

极点的品质因数 Q_p

当极点为一对共轭复数时

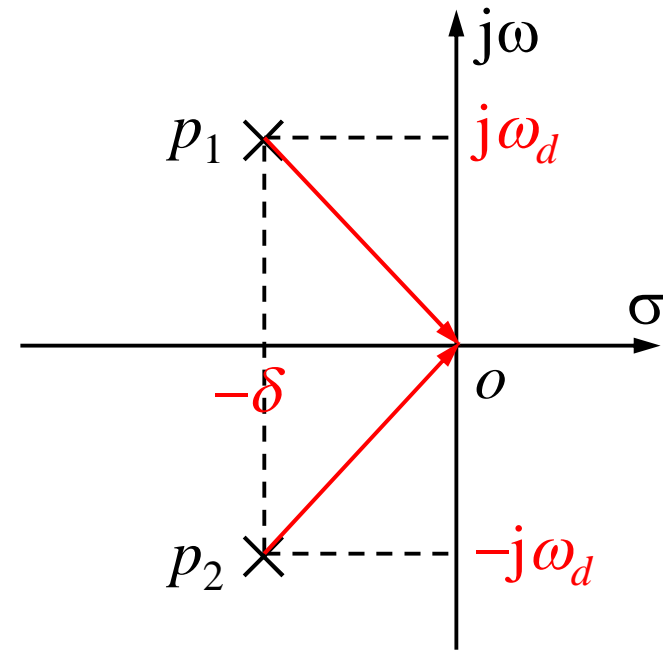
$$Q_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega_d^2}}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

即极点到坐标原点的距离与极点实部之比的一半。

本例： $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\delta = \frac{R}{2L}$ 代入上式得

$$Q_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad \text{是RLC串联谐振回路的品质因数。}$$

对频率特性的影响参见第十一章。



§ 7-9 卷积积分

一、卷积的概念

若已知函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, 则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t-\xi) d\xi$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积, 记作: $f_1(t) * f_2(t)$ 。

✓ 卷积符合交换律:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

✓ 也符合分配律:

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

例：若 $f_1(t) = \varepsilon(t)$, $f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$

求 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解：按卷积的定义有

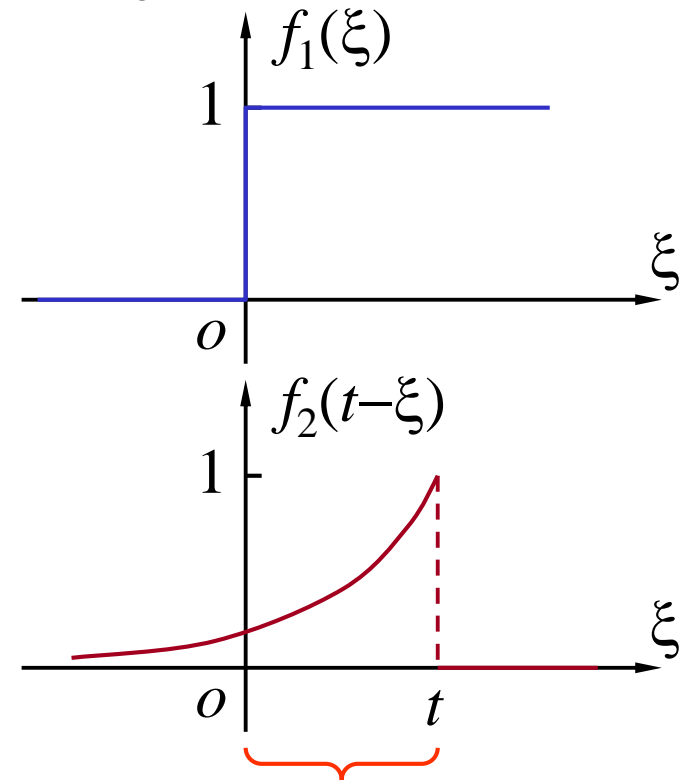
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi$$

$f_1(\xi)$ 是单位阶跃函数,

$$f_2(t - \xi) = e^{-(t - \xi)}$$

且 $(t - \xi) \geq 0$, 即 $\xi \leq t$ 时 $\neq 0$

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^t 1 \cdot e^{-(t - \xi)} d\xi \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{\xi} d\xi = e^{-t} (e^t - 1) = 1 - e^{-t} \end{aligned}$$



$f_1(\xi) f_2(t - \xi) \neq 0$
 的区域为 $[0, t]$

按 $f_2(t) * f_1(t)$ 也能得到上述结果。

拉氏变换的象原函数只需在 $t \geq 0$ 内有定义，因此
若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 都满足条件：

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } f_1(t) = f_2(t) = 0 \quad \xi < 0, f_1(\xi) = 0$$

则 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi = 0$

$$= \int_0^t f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi + 0$$

$$t - \xi < 0, \text{ 即 } \xi > t, f_2(t - \xi) = 0$$

- 在电路分析中遇到的函数都满足上述条件，所以它们的卷积都按下式计算：

$$\underline{f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi}$$

二、拉氏变换的卷积定理

设 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的象函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t)$ 的拉氏变换一定存在，且

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= F_1(s) \cdot F_2(s) \\ \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] &= f_1(t) * f_2(t) \end{aligned} \right\}$$

- 在应用拉氏变换分析电路时，这一性质起十分重要的作用。

- 可以利用它求网络响应：

- $R(s) = E(s) H(s)$

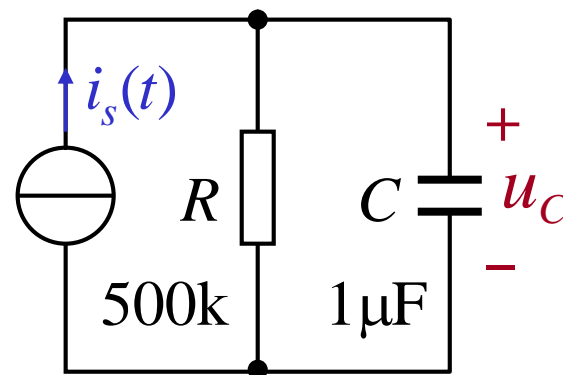
- $r(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s) H(s)] = \int_0^t \overbrace{e(\xi) h(t-\xi)}^{\text{可以交换 } e(t-\xi) h(\xi)} d\xi$

$e(t)$ 为任意激励的时间函数形式。

$h(t-\xi)$ 为网络的冲激响应。

例14-7 已知激励 $i_s(t)=2e^{-t} \mu\text{A}$
求零状态响应 $u_C(t)$ 。

解：根据P149表6-2可知
电路的冲激响应为：



$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = \int_0^t 2 \times 10^{-6} e^{-\xi} \times 10^6 e^{-2(t-\xi)} d\xi$$

代入数据得：

$$h(t) = 10^6 e^{-2t}$$

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_S(s)H(s)]$$

应用卷积定理求反变换

$$u_C(t) = \int_0^t i_s(\xi) h(t-\xi) d\xi$$

$$= 2 \int_0^t e^{-\xi} e^{-2t} e^{2\xi} d\xi$$

$$= 2e^{-2t} \int_0^t e^{\xi} d\xi$$

$$= 2e^{-2t} (e^t - 1)$$

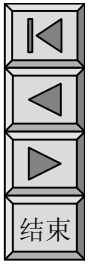
$$= 2 (e^{-t} - e^{-2t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

利用卷积定理求拉氏反变换的例子

若 $F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}$ 求 $f(t)$ 。

解: $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \frac{s}{s^2 + 1}$
 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \frac{s}{s^2 + 1} \right]$ } 主要是这几步的变换。

$$\begin{aligned}
 &= \cos t * \cos t = \int_0^t \cos \xi \cos(t - \xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos(2\xi - t)] d\xi \\
 &= \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t)
 \end{aligned}$$



本章结束