第十六章 二端口网络

内容提要

1. 二端口的概念、方程及参数；
2. 各参数方程形式，参数的含义及求法；
3. 二端口转移函数及求法；
4. 特性阻抗的定义及求法；
5. 二端口等效电路的概念，等效电路的结构及参数；
6. 二端口级联、串联、并联的条件与等效参数的求法；
7. 回转器、负阻变换器的定义与特性。

结束

基本要求

1. 掌握与每种参数相对应的二端口网络方程，理解这些方程各自参数的物理意义；
2. 掌握二端口等效电路；
3. 掌握二端口在不同连接方式时的分析方法；
4. 掌握分析特殊二端口的方法。

重点和难点

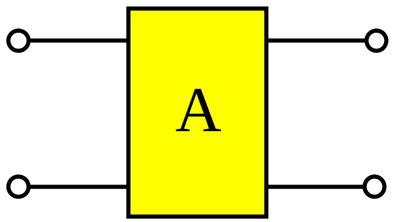
☞重点：两端口的方程和参数的求解。

难点：二端口的参数的求解。

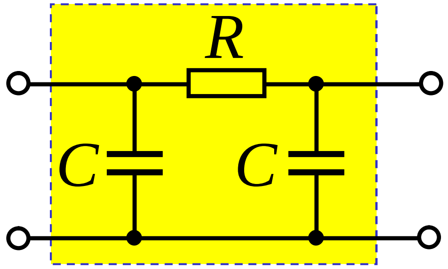
§16-1 二端口网络

- 由一对端钮构成，且满足端口条件：即从端口的一个端钮流入的电流必须等于从该端口的另一个端钮流出的电流。当一个电路与外部电路通过两个端口连接时称此电路为二端口网络。

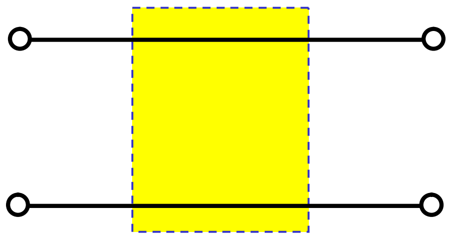
工程实践中，常遇到的二端口



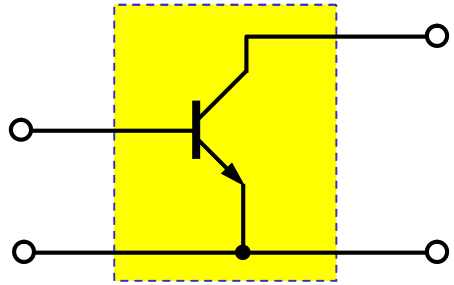
放大器



滤波器



传输线



三极管

变压器(图略)等。

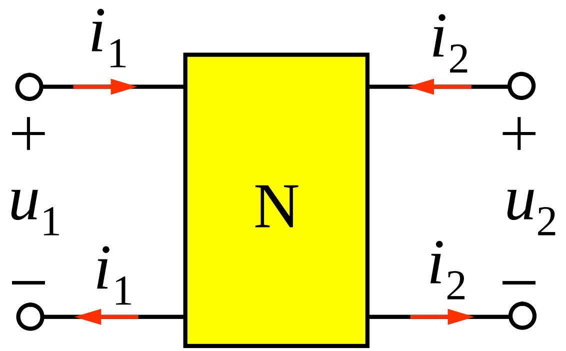
注意

- 如果组成 二端口网络的元件都是线性的，则称为线性二端口网络；

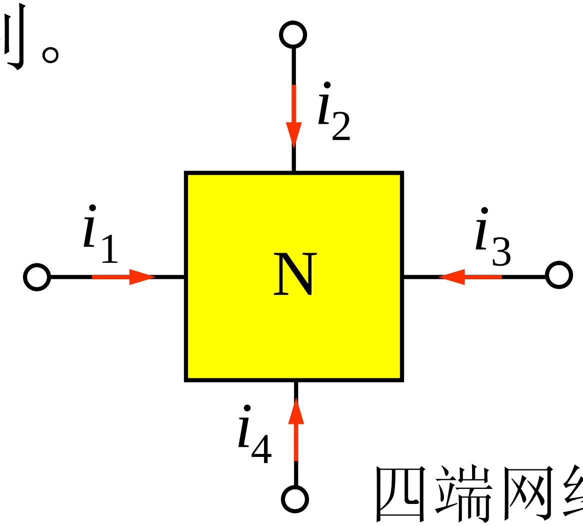
  依据二端口网络的二个端口是否服从互易定理，分为可逆的和不可逆的；

  依据二端口网络使用时二个端口互换是否不改变其外电路的工作情况，分为对称的和不对称的。

- 二端口网络与四端网络的区别。



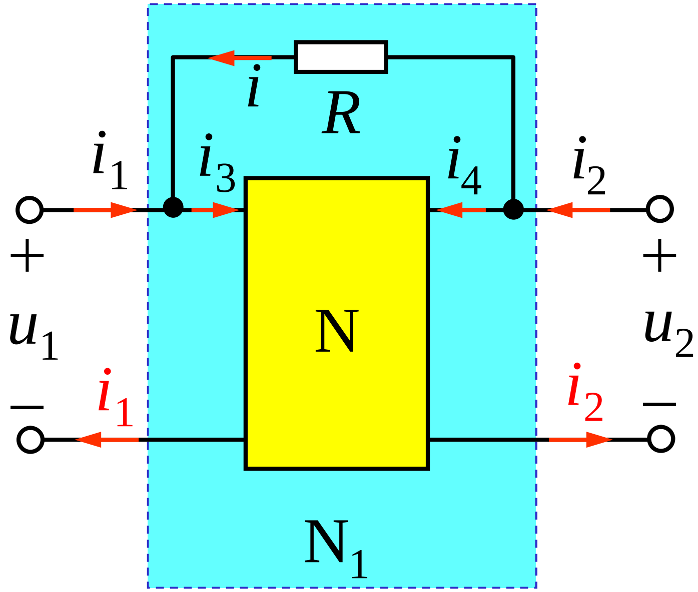
二端口



四端网络

二端口的两个端口间若有外部连接，则会破坏原二端口的端口条件。

若在图示二端口网络的端口间连接R，则端口条件破坏。即



$i_3=i_1+i\neq i_1$， $i_4=i_2-i\neq i_2$。

N不是二端口，而是四端网络。 N_1 是否二端口？

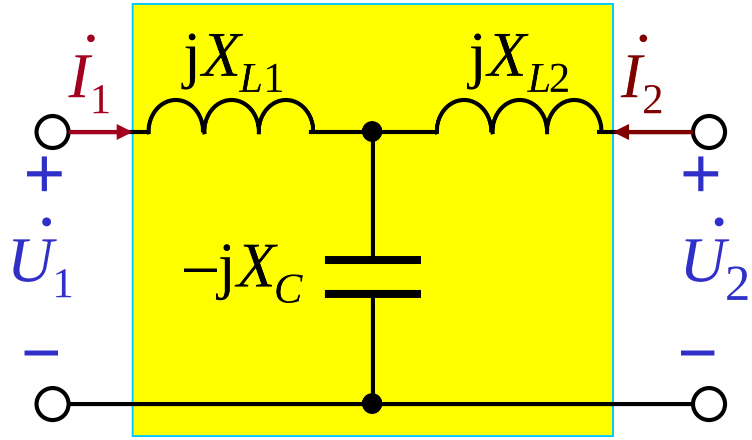
研究二端口网络的意义

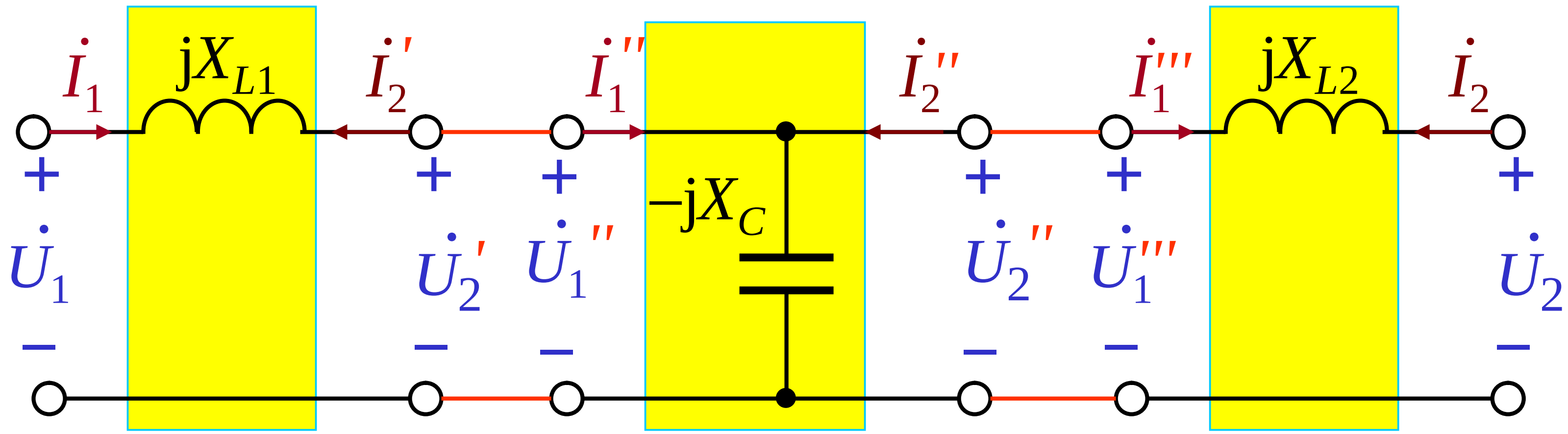
①应用广，其分析方法易推广应用于 n 端口网络；

②可以将任意复杂的二端口分割成若干简单二端口(子网络)进行分析，使分析简化；

可以通过简单二端口的链联、串联、并联等方式得到复杂二端口及其参数。

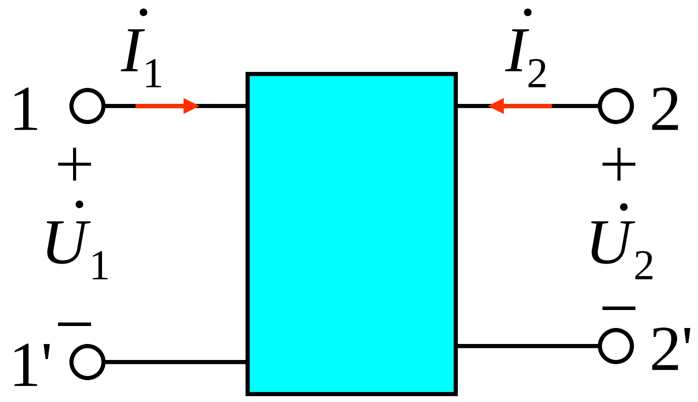
如右图二端口可以分解为





③当仅研究端口的电压电流特性时，可以用二端口网络的电路模型进行研究。

端子1−1'常称为输入端子，
端子2−2'常称为输出端子。

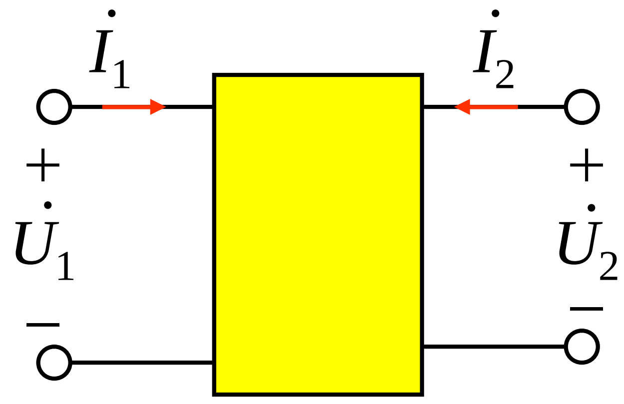


- 用二端口的概念分析电路时，只对端口处的电压电流感兴趣，它们之间的相互关系是通过一些参数来表示的。
- 有了这些参数：当一个端口的电压电流发生变化时，可以确定另一个的变化情况。
- 对不同的二端口，可以比较它们在传输电能、处理信号等方面的性能。
- 端口上有 4 个物理量，任取其中的两个为自变量，可得到端口电压、电流的六种不同的方程。即可用六套参数描述二端口网络。

§16−2 二端口的方程和参数

一、Y(导纳)参数方程及Y参数

1. 方程



由于是线性二端口，
故用叠加原理可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

2. Y(导纳)参数

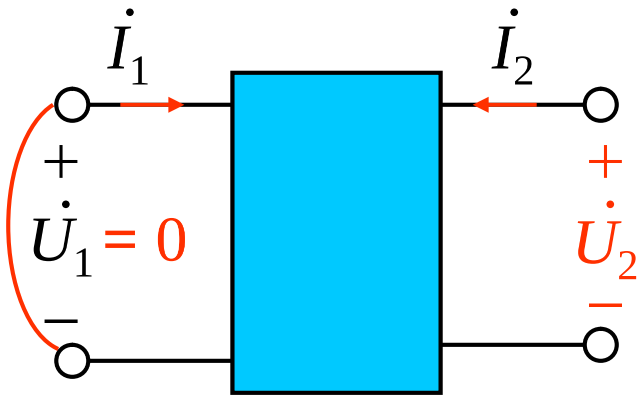
$$\boldsymbol{Y} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}$$

称为二端口的$\boldsymbol{Y}$参数矩阵，属于导纳性质。

3. Y参数的含义与求法

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}\text{短路法}$$

✓ 给定实际电路(结构参数可能未知)，



先通过实验测定端口电流与电压，再经过简单计算即可。

$$Y_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

端口1–1'的短路输入导纳

$$Y_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

口2短路,2与1之间的转移导纳

$$Y_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}$$

口1短路,1与2之间的转移导纳

$$Y_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}$$

端口2–2'的短路输入导纳

- 当电路的结构参数已知时，直接按定义分析计算：

P421例16−1 求Π型电路的Y参数。

解：按定义有：

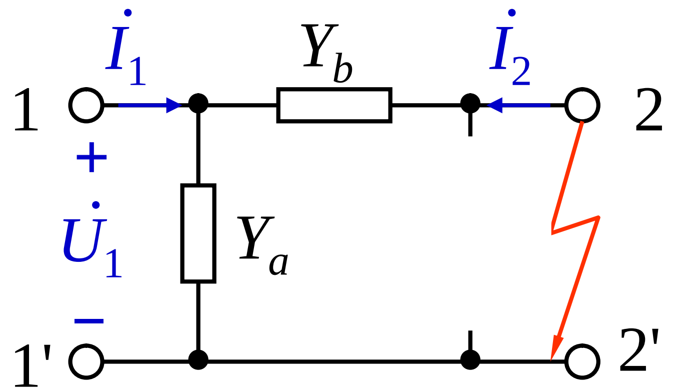
$$Y_{11}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=Y_a+Y_b$$

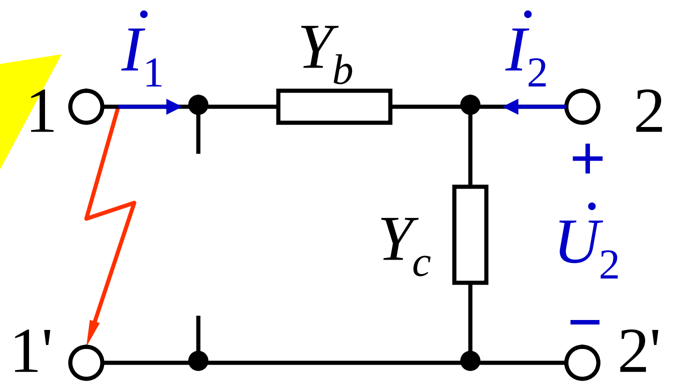
$$Y_{21}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=-Y_b$$

$$Y_{12}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=-Y_b$$

$$Y_{22}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=Y_b+Y_c$$

由于电路结构比较简单，所以能直观地看出结果。





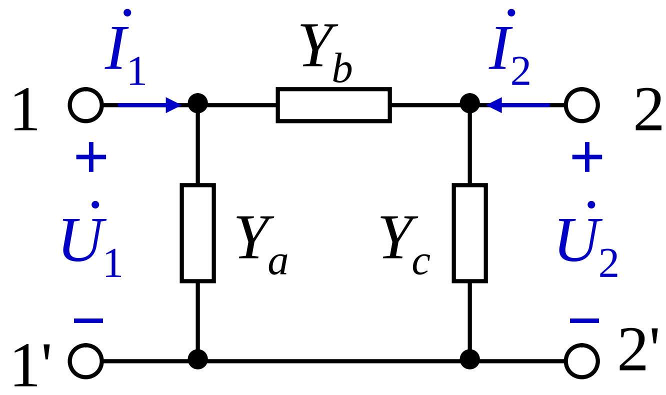
对于由线性R、$L(M)$、C元件构成的任何无源二端口，都具有互易性质，所以$Y_{21}=Y_{12}$。

关于二端口的对称性

满足互易性质的二端口，只有3个参数是独立的。

若二端口的**Y**参数不仅有$Y_{12}=Y_{21}$，而且还有$Y_{11}=Y_{22}$，则这样的二端口在电气上是对称的，称为对称二端口，它只有2个参数是独立的。

把对称二端口的两个端口互换位置后与外电路连接，外部特性不会有任何变化。

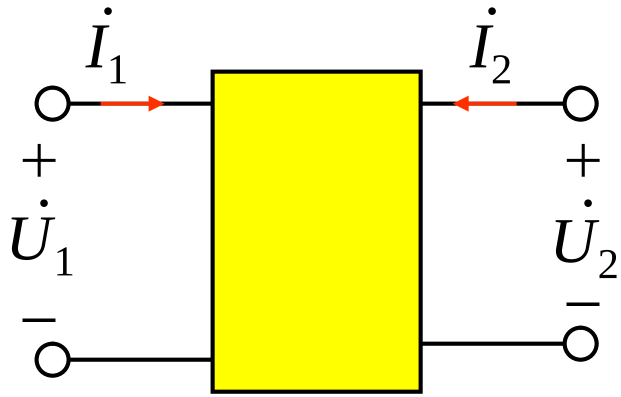


对上图的Π型电路，当$Y_a=Y_c$时，就变成对称二端口。

不仅如此，它在结构上也是对称的。

注意：电气上对称的二端口在结构上不一定对称。

二、Z(阻抗)参数方程及Z参数



1. Z参数方程　可以仿照Y参数用叠加原理得到。

➢ Y参数方程与Z参数方程之间有对偶关系： $Y \longleftrightarrow Z$

$\dot{I} \longleftrightarrow \dot{U}$　短路 $\longleftrightarrow$ 开路

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

2. 各参数的含义

$$Z_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$

为口2开路，口1的输入阻抗。

$$Z_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad Z_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

为口2(口1)开路，2与1(1与2)之间的开路转移阻抗。

$$Z_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

为口1−1'开路时，口2−2'的输入阻抗。

把Z参数方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Z}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

可得Z(阻抗)参数矩阵

$$\boldsymbol{Z}\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}$$

- 对具有互易性质的二端口，总有Z_{21}=Z_{12}。

3. 与Y 参数的关系

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Y}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

比较可知：

开路阻抗矩阵**Z**与短路导纳矩阵***Y***存在互为逆阵的关系：

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{-1} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta_Y}\begin{bmatrix}Y_{22} & -Y_{12}\\ -Y_{21} & Y_{11}\end{bmatrix}$$

$$\Delta_Y=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$$

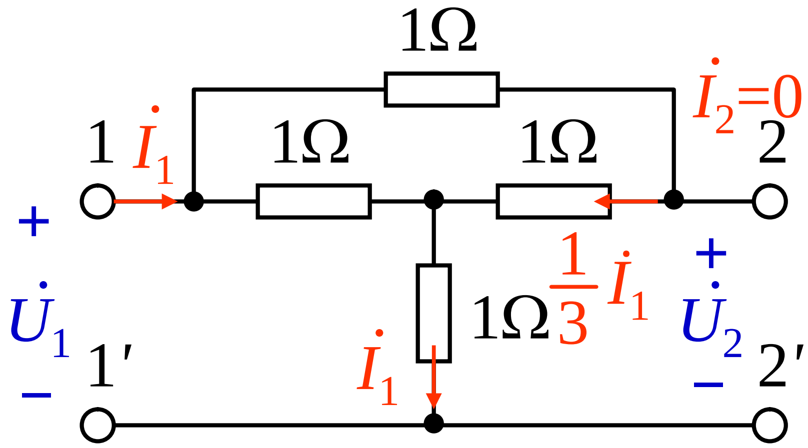
4. Z参数的求法 <u>开路法</u>

实验测量或分析电路。

举例：求P438习题16−2图(*a*) 的Z参数矩阵。

解：为对称二端口，

只有两个独立参数。



根据参数的含义：

$$Z_{11}=Z_{22}=\frac{(1+1)\times 1}{(1+1)+1}+1=\frac{5}{3}\ \Omega$$

按定义求 Z_{21} ：

$$\dot{U}_2=\frac{1}{3}\dot{I}_1+\dot{I}_1=\frac{4}{3}\dot{I}_1$$

$$Z_{21}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}=\frac{4}{3}\ \Omega$$

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{4}{3}\ \Omega$$

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\Omega$$

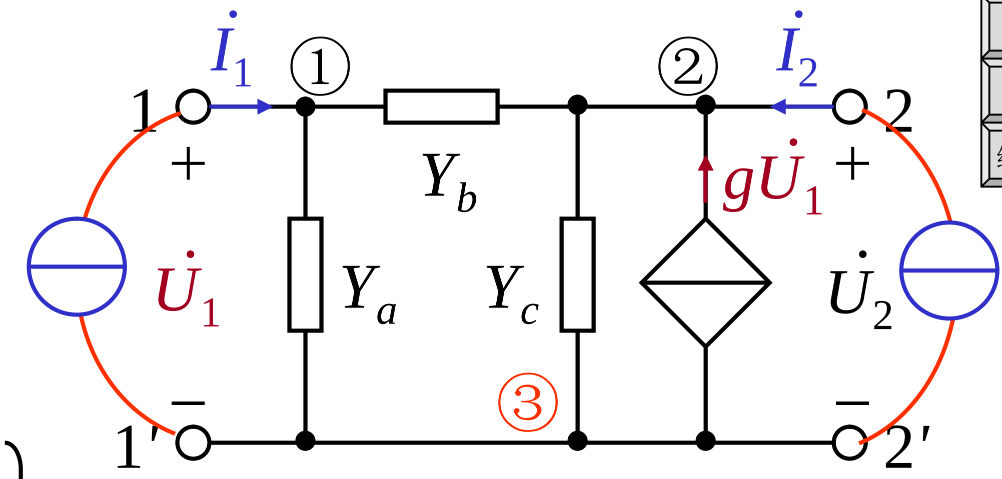
要获得 Y 参数

$$\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta_Z}\begin{bmatrix}Z_{22} & -Z_{12}\\ -Z_{21} & Z_{11}\end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}$$

P423例16–2

- 解：用电流源替代两个端口电流。
- 由结点电压法



$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= (Y_a+Y_b)\dot{U}_1-Y_b\dot{U}_2\\ \dot{I}_2 &= -(Y_b+g)\dot{U}_1+(Y_b+Y_c)\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_a+Y_b & -Y_b\\ -(Y_b+g) & Y_b+Y_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$

比较可求得4个Y参数：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_a+Y_b & -Y_b\\ -(Y_b+g) & Y_b+Y_c\end{bmatrix}$$

通过本例：

(1) 可采用直接列方程法求参数。

(2)含受控源时，不满足互易性质，$Y_{12}\neq Y_{21}$。

结束

综上，二端口参数的求法可归纳如下：

给定实际电路

1. 开路短路法(按定义)：

   结构参数未知，通过实验测量；

   结构参数已知，通过电路计算；

2. 直接列该参数方程(矩阵形式)，再与该参数矩阵的对应元素比较；

3. 通过其它已知参数求本参数(P378表16−1)。

下面将要介绍的传输参数和混合参数，求法同上。

三、*T* (传输)参数

*Y*参数和*Z*参数都能描述二端口的外特性。

而且两者存在互换关系：$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}$。

但只用这两个参数描述二端口还不够完善:

(1)有时希望找出两端口之间电压电流的直接关系;

如：放大器的电压(或电流)放大倍数,

滤波器的幅频特性,

传输线始端与终端之间的电压电流关系等。

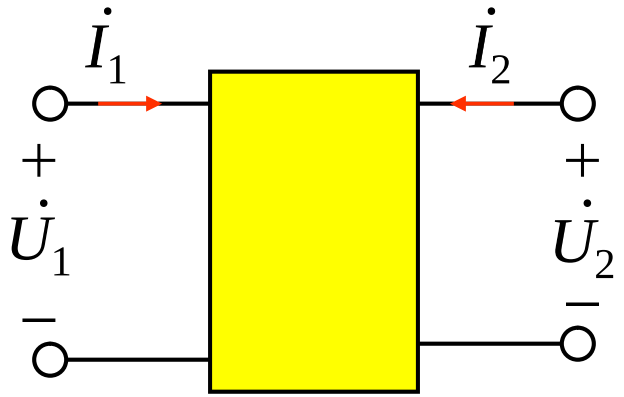
(2)有些二端口不同时存在***Y*** 和 ***Z*** 表达式;

(3)有些二端口既无***Y*** 也无 ***Z*** 表达式;

如：理想变压器。

所以有些二端口的外特性宜用其它参数去描述。

结束



$$\left.\begin{aligned}\dot I_1 &= Y_{11}\dot U_1 + Y_{12}\dot U_2\\ \dot I_2 &= Y_{21}\dot U_1 + Y_{22}\dot U_2\end{aligned}\right\}$$

将二端口的Y参数方程 2 作如下变换：

$$\dot U_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot U_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot I_2$$

将 $\dot U_1$ 代入方程 1

经过整理后得：

$$\dot I_1 = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}\right)\dot U_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot I_2$$

将以上两式写成：

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= A\dot U_2 - B\dot I_2\\ \dot I_1 &= C\dot U_2 - D\dot I_2\end{aligned}\right\}$$

- 这就是二端口的T 参数方程。
- A、B、C、D 称为T(传输)参数，或 A (一般)参数 。

(A_{11}、A_{12}、A_{21}、 A_{22})。

比较可知如何通过Y 参数得到T 参数。

注意负号！

将T 参数方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}}_{T}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$$

T 参数的含义：

$$A=\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

为两端口的电压比值，量纲是1；

$$B=\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$

为短路转移阻抗；

$$C=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

为开路转移导纳；

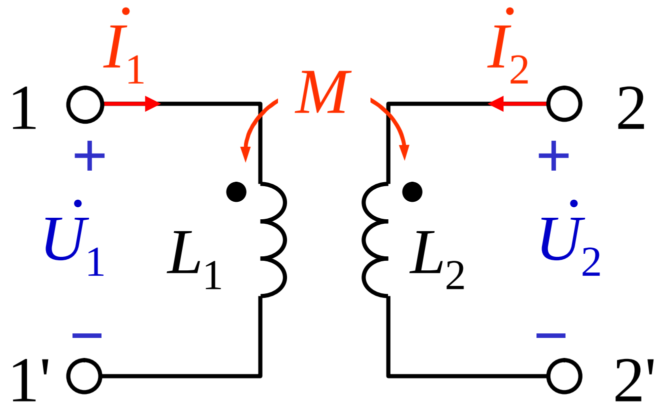
$$D=\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$

为两端口电流的比值，量纲也是1；

- 特点：输出端口开路短路，输入量比输出量。
- 对无源线性二端口，T 参数只有3个是独立的：

  $AD-BC=1$ (为何不是$B=C$？)
- 对于对称二端口有$A=D$。

举例：求P438习题16−3图(*c*)的*T* 参数矩阵。



解：由图得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2\\ \dot{U}_2 &= j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{j\omega M}\dot{U}_2 + \frac{L_2}{M}(-\dot{I}_2)$$

所以：

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & \dfrac{j\omega L_1 L_2}{M} - j\omega M \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

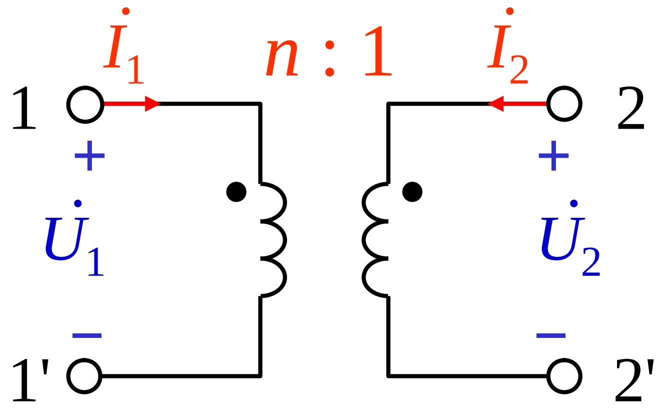
代入方程1

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\left(\frac{1}{j\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2\right) + j\omega M\dot{I}_2$$

整理 $\dot{U}_1 = \dfrac{L_1}{M}\dot{U}_2 + \left(\dfrac{j\omega L_1 L_2}{M} - j\omega M\right)(-\dot{I}_2)$

- 因$AB-CD=1$，故只有3个参数是独立的。
- 若$L_1 = L_2$，则A=D。

二端口理想元件 — 理想变压器



$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 &= -\frac{1}{n}\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$$

T参数矩阵为：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}$$

用T参数求Z参数和Y参数

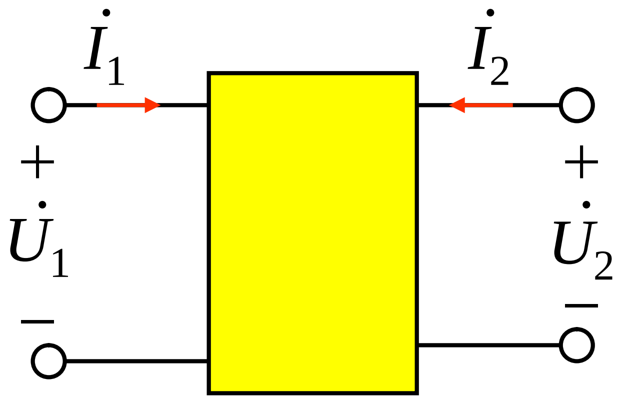
$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\dfrac{A}{C} & \dfrac{\Delta_T}{C}\\ \dfrac{1}{C} & \dfrac{D}{C}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\dfrac{D}{B} & -\dfrac{\Delta_T}{B}\\ -\dfrac{1}{B} & \dfrac{A}{B}\end{bmatrix}$$

由于B、C等于0，所以理想变压器不存在Z参数和Y参数。

四、H(混合)参数！

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$



1. H参数的含义如下

$$H_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

为短路输入阻抗；

显然： $H_{11}=1/Y_{11}$。

$$H_{21}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$

为(短路)电流放大系数；

$$H_{22}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

为开路输出导纳；

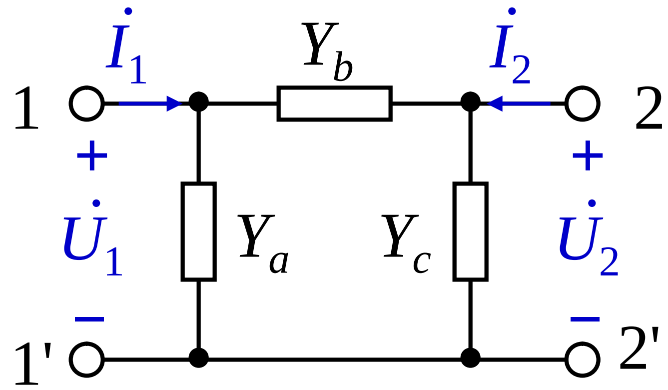
显然： $H_{22}=1/Z_{22}$。

$$H_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

为输入端开路时的反向电压传输系数；

2. 将H参数方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$$



例：求Π型电路的H参数。

解：H_{11}为短路输入阻抗

$$H_{11}=\frac{1}{Y_{11}}=\frac{1}{Y_a+Y_b}$$

H_{22}为开路输出导纳

$$H_{22}=Y_c+\frac{1}{\frac{1}{Y_a}+\frac{1}{Y_b}}$$

H_{12}为反向电压传输系数

由分压公式得 $$\dot{U}_1=\frac{\frac{1}{Y_a}}{\frac{1}{Y_a}+\frac{1}{Y_b}}\dot{U}_2$$

H_{21}为短路电流放大系数

由分流公式得 $$\dot{I}_2=-\frac{\frac{1}{Y_a}}{\frac{1}{Y_a}+\frac{1}{Y_b}}\dot{I}_1$$

对无源线性二端口，$H_{21}=-H_{12}$
H 参数也只有3个是独立的。

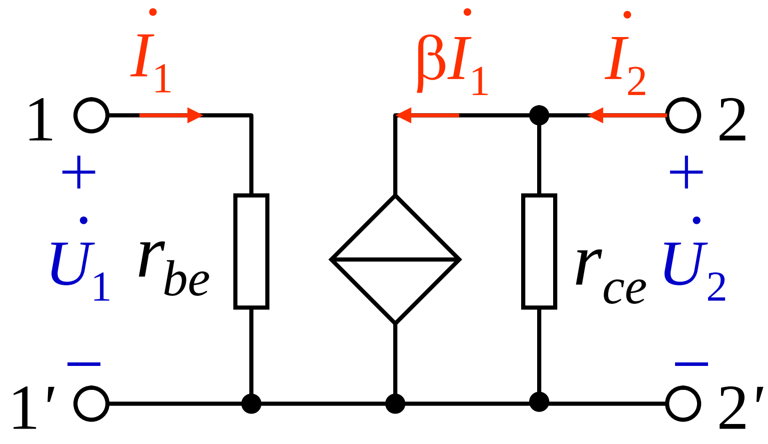
对于对称二端口，由于有

$$Y_{11}=Y_{22} \text{ 或 } Z_{11}=Z_{22}$$

所以 $H_{11}H_{22}-H_{12}H_{21}=1$

例：求图示电路的H参数。

三极管的中频简化微变等效电路



输入输出为两个独立回路：

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1&=r_{be}\,\dot{I}_1\\ \dot{I}_2&=\beta\dot{I}_1+\frac{1}{r_{ce}}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1&=H_{11}\dot{I}_1+H_{12}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2&=H_{21}\dot{I}_1+H_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

比较得：

$$H_{11}=r_{be}\,,\quad H_{12}=0,$$

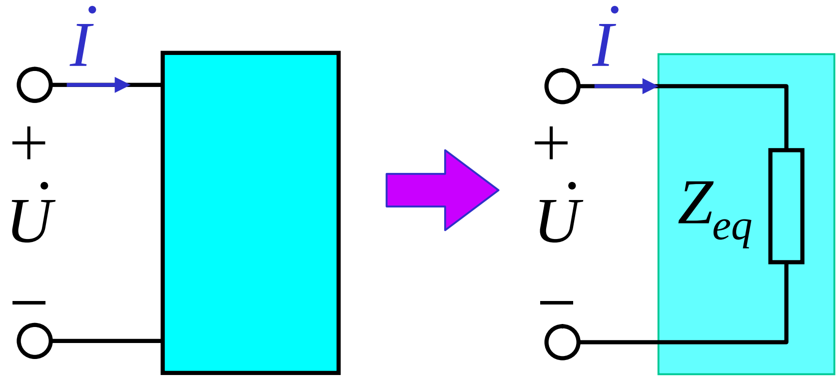
$$H_{21}=\beta\,,\quad H_{22}=\frac{1}{r_{ce}}$$

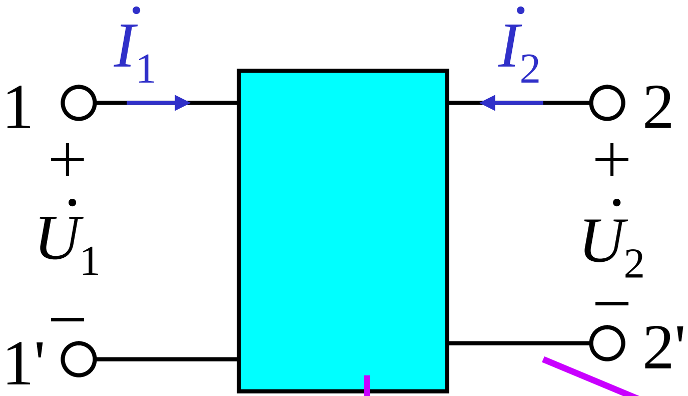
Y、Z、T、H 参数之间的相互转换关系见教材 P427表16-1。

§ 16−3 二端口的等效电路

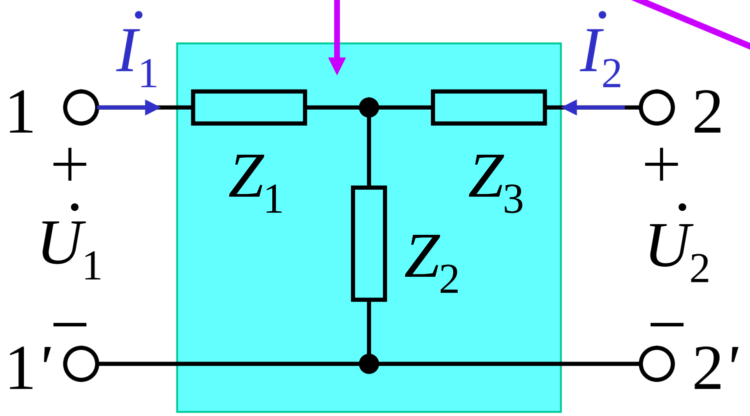
一、等效的概念

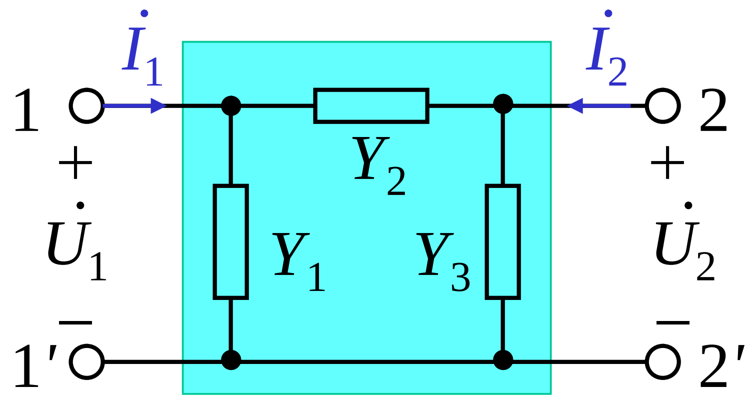
- 任何复杂的无源线性一端口，都可以用一个Z_{eq}表征其外特性。





- 同理，任何复杂的无源线性二端口，可以用3个阻抗(或导纳)表征其外特性。
- 构成T(或Π)形等效电路。

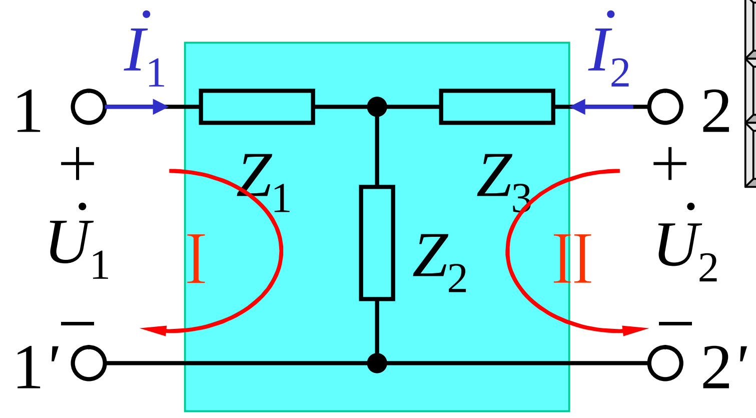




二、等效电路的确定

1. 若给定Z参数，则应求 T 形等效电路。

求法如下：



① 列T形电路的回路方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= (Z_1+Z_2)\,\dot{I}_1 + Z_2\,\dot{I}_2\\ \dot{U}_2 &= Z_2\,\dot{I}_1 + (Z_2+Z_3)\,\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

② 与Z参数方程比较

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2\\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

$$Z_2 = Z_{12} = Z_{21}$$

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 = Z_1 + Z_{12}$$

$$\therefore\ Z_1 = Z_{11} - Z_{12}$$

$$Z_{22} = Z_2 + Z_3 = Z_{12} + Z_3$$

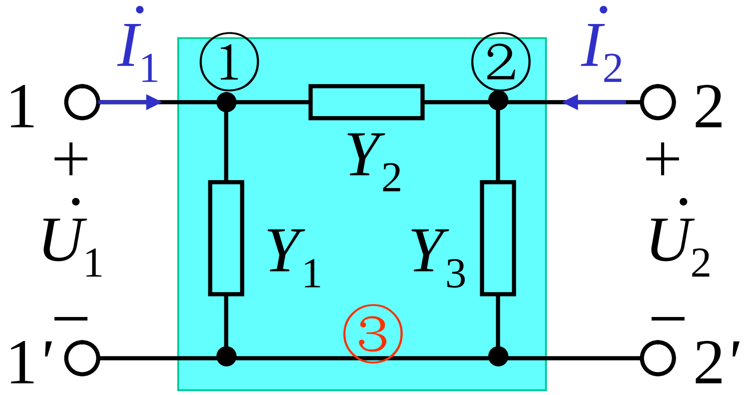
$$\therefore\ Z_3 = Z_{22} - Z_{12}$$

Z_1、Z_2、Z_3为 T 形等效电路的三个阻抗。

2. 给定Y参数，应先求Π形等效电路

用电流源替代端口电流，

由结点法列Y参数方程。



$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= (Y_1+Y_2)\dot{U}_1 - Y_2\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= -Y_2\dot{U}_1 + (Y_2+Y_3)\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

$$Y_2 = -Y_{12} = -Y_{21}$$

与Y参数方程比较

$$Y_{11} = Y_1 - Y_{12} \longrightarrow Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2\end{aligned}\right\}$$

$$Y_{22} = Y_2 + Y_3 \longrightarrow Y_3 = Y_{22} + Y_{12}$$

3. 当给定其它参数时

若要等效成T形电路，则应先变换成Z参数。

若要等效成Π形电路，则应先变换成Y参数。

例如，已知T参数

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2\\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

将方程2改写为

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{C}\dot{I}_1 + \frac{D}{C}\dot{I}_2$$

代入方程 1并整理

$$\dot{U}_1 = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \left(\frac{AD}{C} - B\right)\dot{I}_2$$

对于无源线性二端口有 $AD - BC = 1$

于是T参数方程变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \frac{1}{C}\dot{I}_2\\ \dot{U}_2 = \frac{1}{C}\dot{I}_1 + \frac{D}{C}\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

与Z参数方程比较得Z参数，然后求出T形等效电路的三个阻抗：

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = \frac{A-1}{C}$$

$$Z_2 = Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C}$$

$$Z_3 = Z_{22} - Z_{12} = \frac{D-1}{C}$$

Π形等效电路的Y_1、Y_2、Y_3与T参数之间的关系为：

$$Y_1 = \frac{D-1}{B} \qquad Y_2 = \frac{1}{B} \qquad Y_3 = \frac{A-1}{B}$$

对于对称二端口，其T形或Π形等效电路也一定对称。

4. 二端口内含受控源

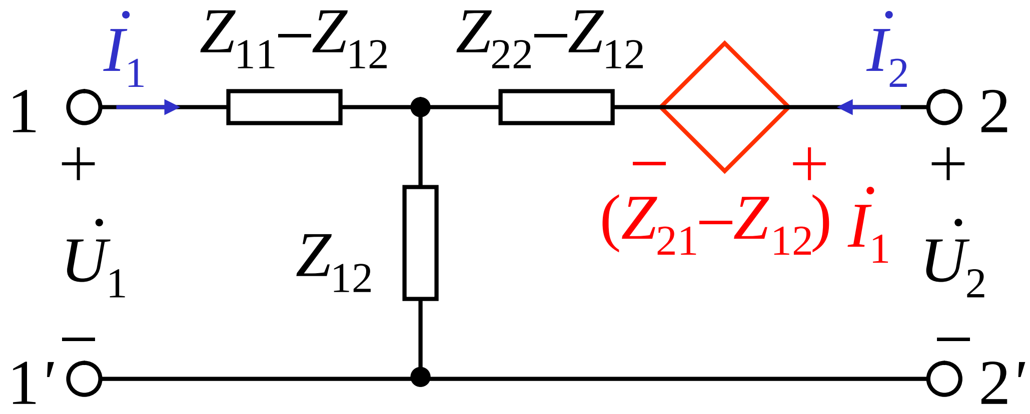
(1)T形等效电路

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

此时$Z_{12} \neq Z_{21}$

将方程 2 作如下变换

$$\dot{U}_2 = Z_{12}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \underbrace{+(Z_{21}-Z_{12})\dot{I}_1}_{\text{CCVS}}$$



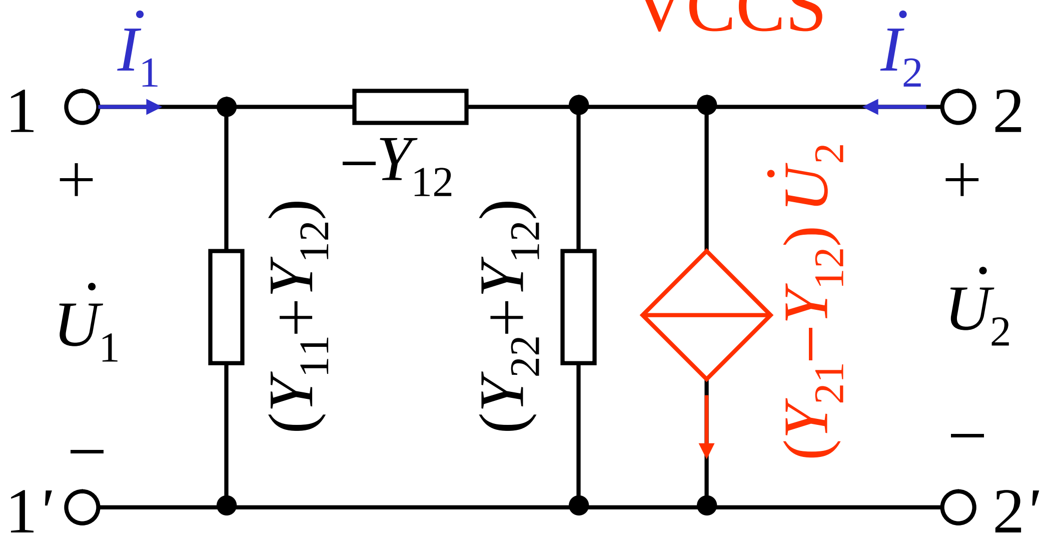
含受控源的二端口的T形等效电路

(2)Π形等效电路

含受控源时$Y_{12} \neq Y_{21}$

用同样的方法得如下方程：

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{12}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + \underbrace{(Y_{21}-Y_{12})\dot{U}_1}_{\text{VCCS}} \end{aligned}\right\}$$



含受控源二端口的Π形等效电路

P440习题16-10(b)

已知 $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

问是否含受控源，并求它的Π形等效电路

解：Y_{11}=5S，Y_{22}=3S

$Y_{12} = -2\text{S}$，$Y_{21} = 0$

$(Y_{21}-Y_{12}) = 2\text{S}$

$Y_1 = (Y_{11}+Y_{12}) = 3\text{S}$

$Y_2 = -Y_{12} = 2\text{S}$

$Y_3 = (Y_{22}+Y_{12}) = 1\text{S}$

§ 16-4 二端口的转移函数

结束

- 二端口的转移函数指：用运算形式表示的输出电压或电流与输入电压或电流之比。

  也称为传递函数。
- 实际上是第14章中网络函数的一种。
- 本节讨论在二端口条件下的转移函数，且二端口内部没有独立源和附加电源。

一、无端接时的转移函数

1. 二端口无端接的条件

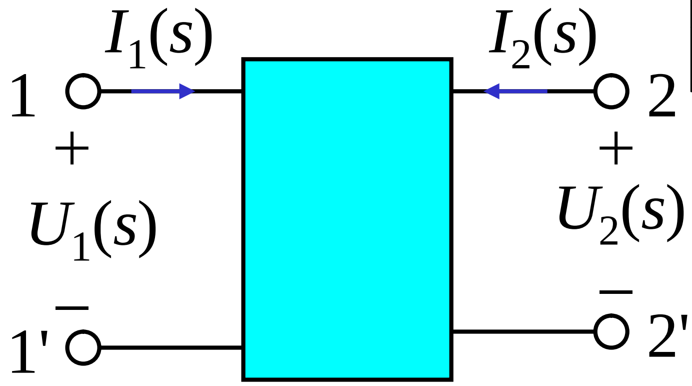
①输入端接无内阻抗激励源；

②输出端无负载，即

输出电压时开路，输出电流时短路。

2. 无端接情况下的四种转移函数

(1)电压转移函数



$U_1(s)=Z_{11}(s)I_1(s)$

$U_2(s)=Z_{21}(s)I_1(s)$

令$I_2(s)=0$，即输出端开路

所以电压转移函数为 $\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}=\dfrac{Z_{21}(s)}{Z_{11}(s)}$

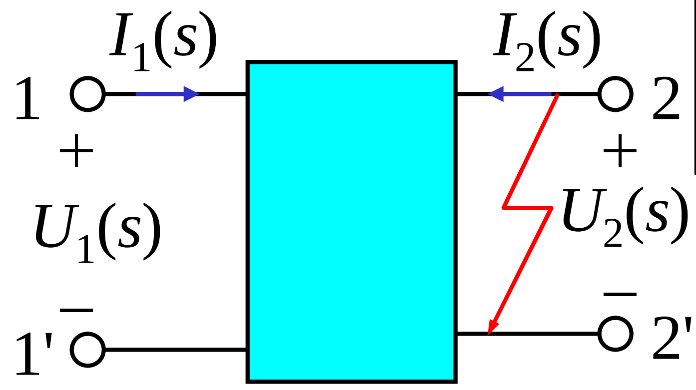
或者根据Y参数方程

$I_1(s)=Y_{11}(s)U_1(s)+Y_{12}(s)U_2(s)$

$I_2(s)=Y_{21}(s)U_1(s)+Y_{22}(s)U_2(s)=0$ $\xrightarrow[\text{由此得}]{}$ $\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}=-\dfrac{Y_{21}(s)}{Y_{22}(s)}$

令$I_2(s)=0$ 有

(2)电流转移函数



由Z参数方程 2

$$U_2(s)=Z_{21}(s)I_1(s)+Z_{22}(s)I_2(s)=0$$

令$U_2(s)=0$（输出端短路）

所以用Z参数表示的电流转移函数为

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=-\frac{Z_{21}(s)}{Z_{22}(s)}$$

同理可得

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=\frac{Y_{21}(s)}{Y_{11}(s)}$$

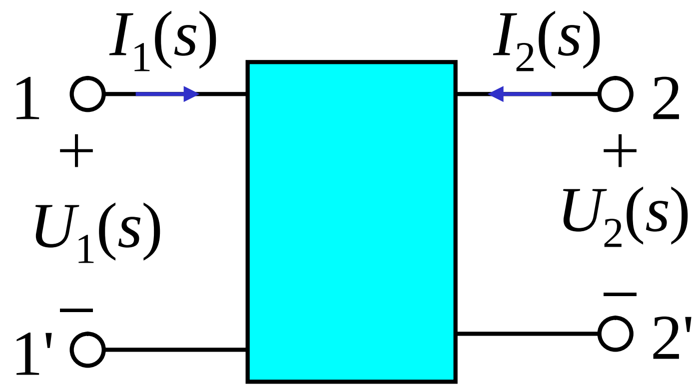
综上所述，求转移函数的方法是：

先列出适当的参数方程(有端接时可能要采用两种不同参数方程)，

再按转移函数的定义求出其比值。(输出端开路或短路)

(3) 转移导纳函数

令$U_2(s)=0$ $\qquad \dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}=Y_{21}(s)$



(4) 转移阻抗函数

令$I_2(s)=0$ $\qquad \dfrac{U_2(s)}{I_1(s)}=Z_{21}(s)$

以上四种转移函数是纯粹用Y参数或Z参数表示的。

也可以纯粹用$T\,(A)$ 参数或 H 参数表示。

比如由H 参数方程：

$$U_1(s)=H_{11}(s)I_1(s)+H_{12}(s)\,U_2(s)$$
$$I_2(s)=H_{21}(s)I_1(s)+H_{22}(s)\,U_2(s)$$

令 $U_2(s)=0$ 得

$$\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{H_{21}(s)}{H_{11}(s)}$$

二、有端接时的转移函数

- 实用中，二端口的输入激励总是有内阻抗Z_S的，输出端往往接有负载Z_L。

  所以二端口一般是有端接的。

- 有端接的二端口分两种情况：

(1) Z_S和Z_L只计及其中一个，称为单端接的二端口；

(2) Z_S和Z_L都计及，称为双端接的二端口。

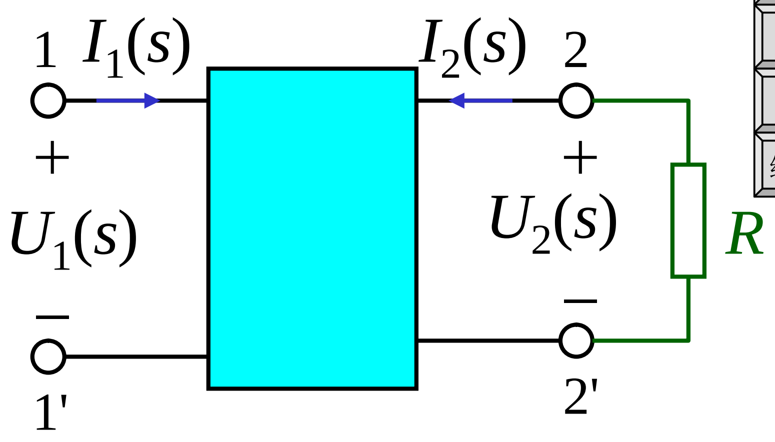
✓ 有端接时转移函数的求法：

① 选取适当的参数，列参数方程；

② 列端口的VCR；

③ 按定义推出转移函数。

1. 单端接的情况



✓ 选Y参数：

$$I_2(s)=Y_{21}(s)U_1(s)+Y_{22}(s)U_2(s)$$

✓ 端口VCR：

$$U_2(s)=-R\,I_2(s)$$

消去$U_2(s)$：

$$I_2(s)=Y_{21}(s)U_1(s)-Y_{22}(s)R\,I_2(s)$$

✓ 按定义得转移导纳

$$\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Y_{21}(s)}{1+Y_{22}(s)R}$$

若选Z参数：

$$U_2(s)=Z_{21}(s)I_1(s)+Z_{22}(s)I_2(s)$$

由端口VCR
消去$U_2(s)$:

$$U_2(s)=Z_{21}(s)I_1(s)-Z_{22}(s)\frac{U_2(s)}{R}$$

则按定义得转移阻抗：

$$\frac{U_2(s)}{I_1(s)}=\frac{Z_{21}(s)}{R+Z_{22}(s)}$$

若同时采用Y参数和Z参数：

$I_2(s)=Y_{21}(s)U_1(s)+Y_{22}(s)U_2(s)$

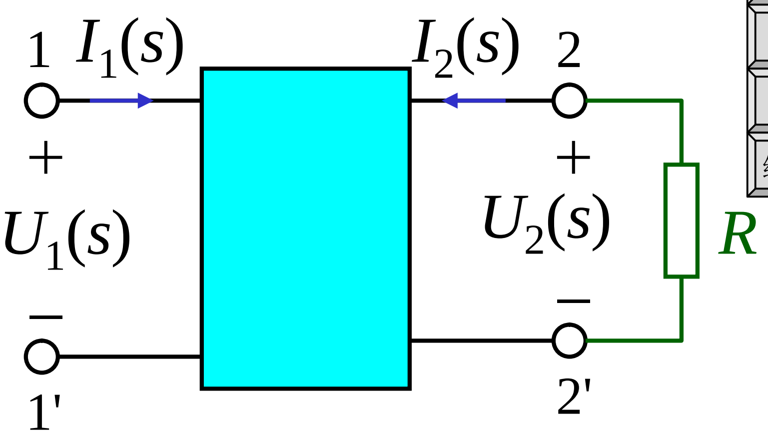
$U_1(s)=Z_{11}(s)I_1(s)+Z_{12}(s)I_2(s)$

和端口方程： $U_2(s)=-R\,I_2(s)$

则消去$U_2(s)$和$U_1(s)$后

可得电流转移函数：

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=\frac{Y_{21}(s)\,Z_{11}(s)}{1+Y_{22}(s)R-Z_{12}(s)Y_{21}(s)}$$



若采用Y、Z参数的另一个方程，并消去$I_2(s)$和$I_1(s)$

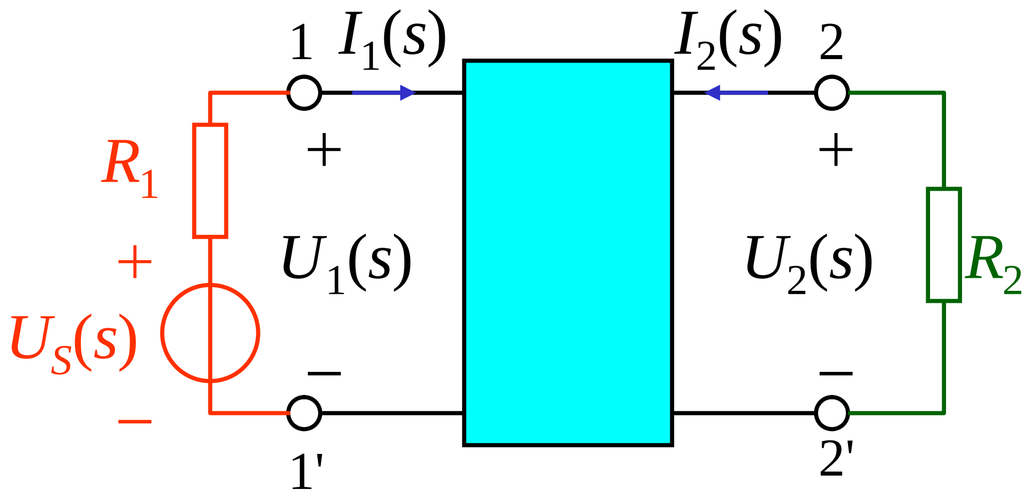
则可得电压转移函数：

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Z_{21}(s)\,Y_{11}(s)}{1+Z_{22}(s)\dfrac{1}{R}-Z_{21}(s)Y_{12}(s)}$$

在求电流、电压转移函数时，采用了两种不同的参数方程。

2. 双端接的情况

如果仍以$U_1(s)$作为输入，则转移函数与单端接的情况相同！。



讨论双端接的情况应把$U_S(s)$作为输入。

此时，转移函数将与两个端接阻抗有关。

求转移函数的思路与单端接的情况类似：

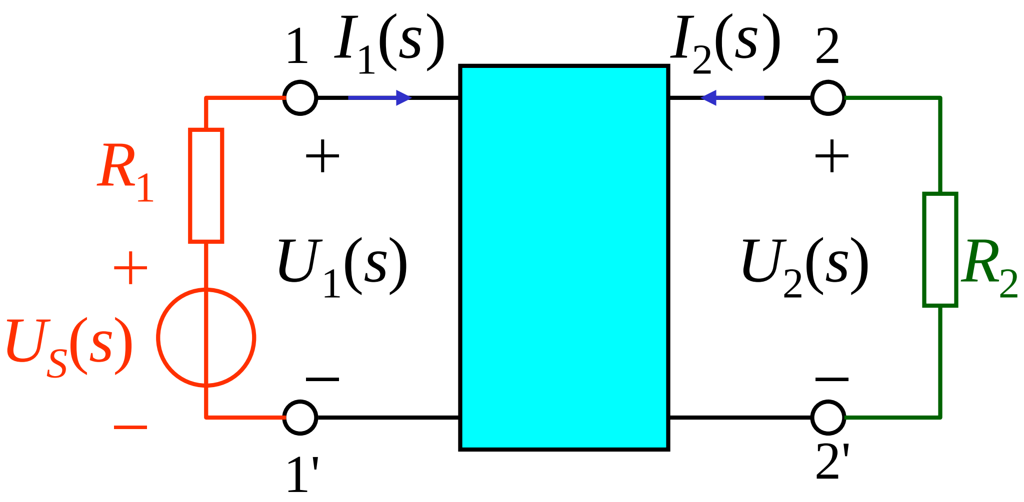
输入端： $U_1(s) = U_S(s) - R_1 I_1(s)$

输出端： $U_2(s) = -R_2 I_2(s)$

代入Z 参数方程：

$$U_S(s) - R_1 I_1(s) = Z_{11}(s) I_1(s) + Z_{12}(s) I_2(s)$$

$$-R_2 I_2(s) = Z_{21}(s) I_1(s) + Z_{22}(s) I_2(s)$$



$$\begin{cases} U_S(s) - R_1 I_1(s) = Z_{11}(s) I_1(s) + Z_{12}(s) I_2(s) \\ -R_2 I_2(s) = Z_{21}(s) I_1(s) + Z_{22}(s) I_2(s) \\ U_S(s) = [Z_{11}(s) + R_1]\, I_1(s) + Z_{12}(s)\, I_2(s) \end{cases}$$

由这两个方程消去$I_1(s)$得到$I_2(s)$的表达式。

于是电压转移函数为：

$$\frac{U_2(s)}{U_S(s)} = \frac{-R_2 I_2(s)}{U_S(s)} = \frac{-Z_{21}(s) R_2}{[R_1 + Z_{11}(s)][R_2 + Z_{22}(s)] - Z_{12}(s) Z_{21}(s)}$$

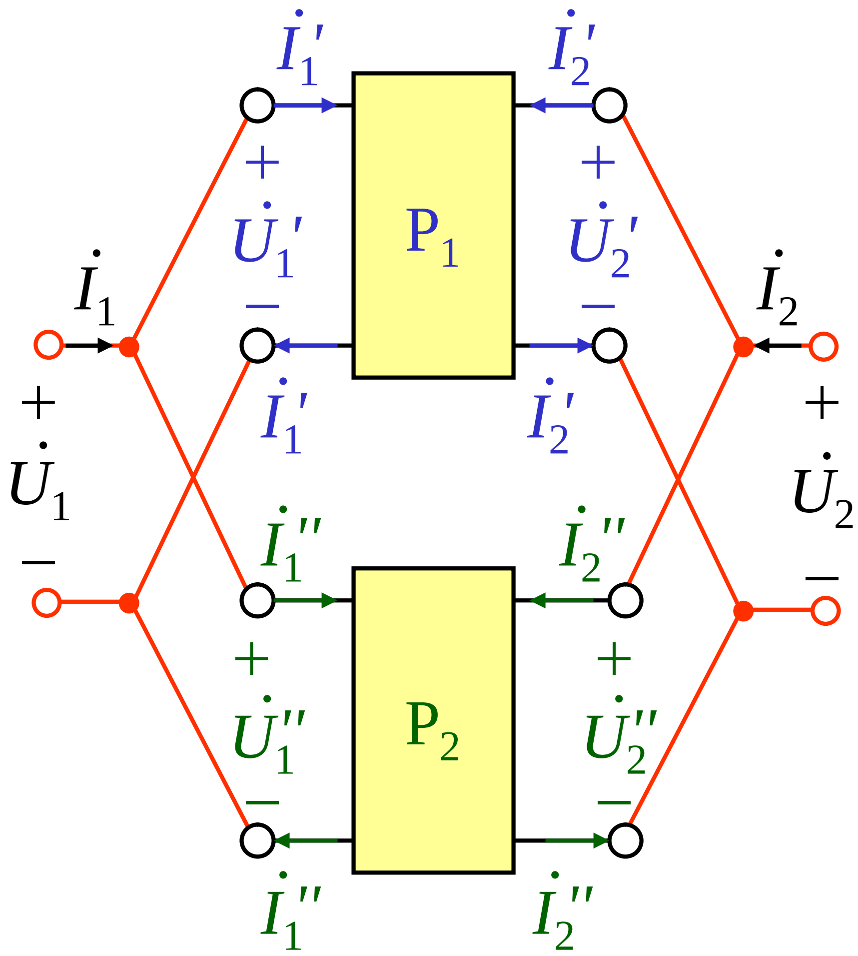
§ 16-5 二端口的连接

✓ 讨论二端口连接的意义

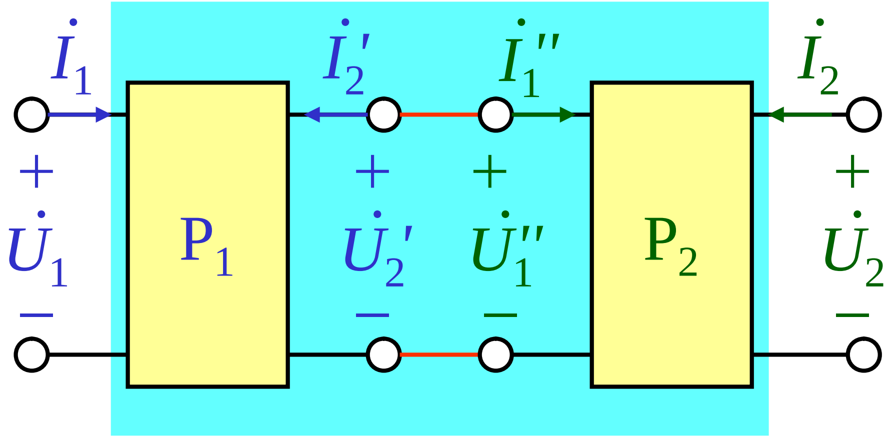
简化电路的分析和设计。

✓ 二端口有3种连接方式

级联、串联、并联。



一、级联(链联)



- ✓ 复合二端口的输入端为 P_1(第1个)的输入端。
- ✓ 而输出端则为 P_2(最后1个)的输出端。
- ✓ 在连接处有：$\dot{U}_2' = \dot{U}_1''$　$\dot{I}_2' = -\dot{I}_1''$

设: P_1、P_2的T 参数分别为 $\boldsymbol{T}'=\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{T}''=\begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$

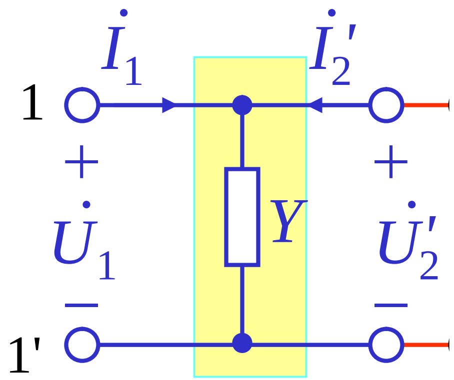
则 $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}'\,\boldsymbol{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$

所以复合二端口的T 参数矩阵为 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}'\,\boldsymbol{T}''$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T'}\ \boldsymbol{T''} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A'A''+B'C'' & A'B''+B'D'' \\ C'A''+D'C'' & C'B''+D'D'' \end{bmatrix}$$

举例：求P389习题16−12图(*a*) 的*T* 参数矩阵。



设二端口P_1的*T* 参数矩阵为 $\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

解：视为两个二端口链联

求左边对称二端口的*T* 参数(输出端开路短路，输入比输出)。

输出端开路得：

$A' = 1$，$C' = Y$

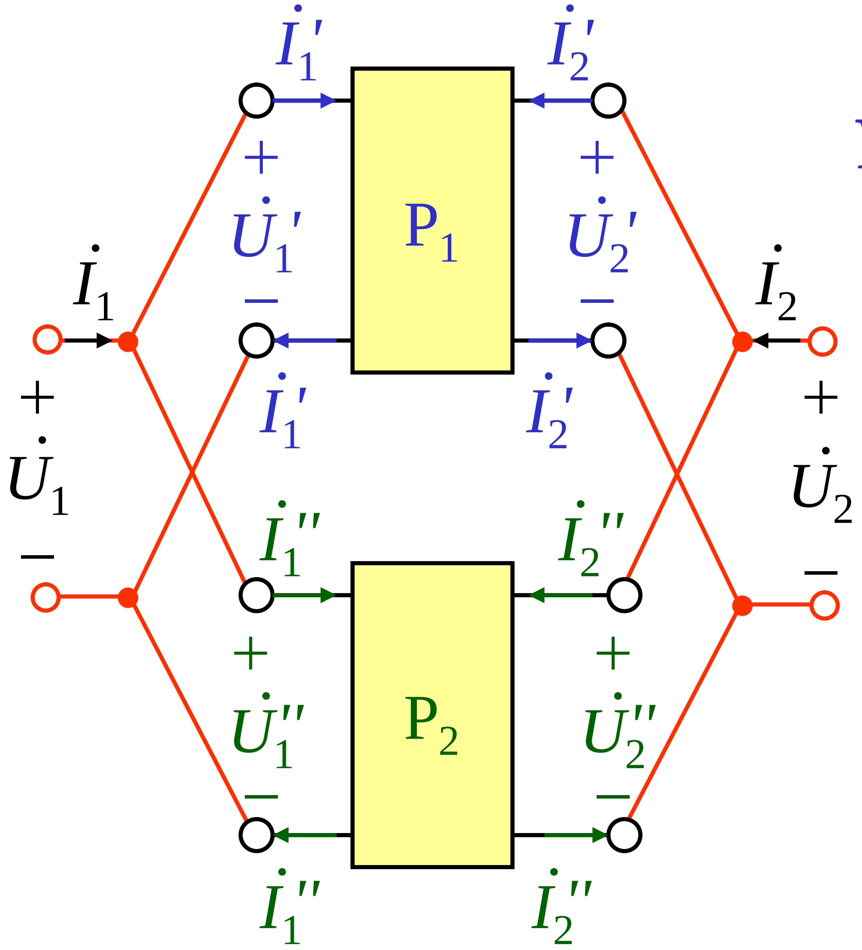
由对称性得：$D'=A'= 1$，$B' = 0$

所以：

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ AY+C & BY+D \end{bmatrix}$$

二、并联



$$\dot U_1' = \dot U_1'' = \dot U_1 \qquad \dot U_2' = \dot U_2'' = \dot U_2$$

$$\dot I_1 = \dot I_1' + \dot I_1'' \qquad \dot I_2 = \dot I_2' + \dot I_2''$$

设： P_1、P_2的Y参数分别为

$$\boldsymbol{Y}'=\begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Y}''=\begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix}$$

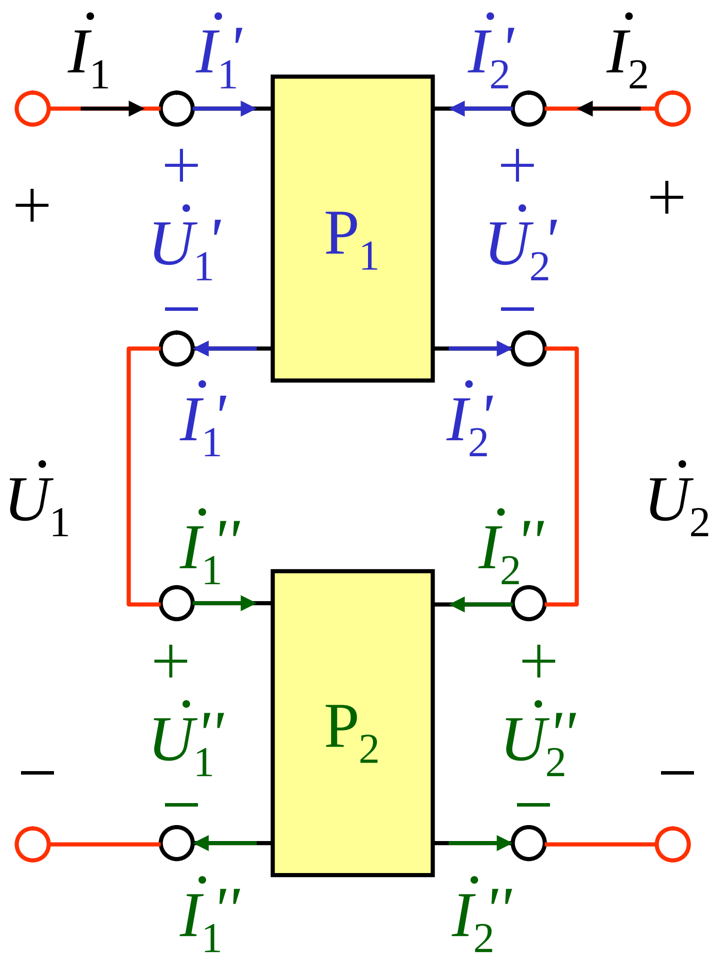
则：
$$\begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot I_1' \\ \dot I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot I_1'' \\ \dot I_2'' \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{Y}'\begin{bmatrix} \dot U_1' \\ \dot U_2' \end{bmatrix} + \boldsymbol{Y}''\begin{bmatrix} \dot U_1'' \\ \dot U_2'' \end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{Y}'+\boldsymbol{Y}'')\begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}\begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix}$$

复合二端口的Y参数矩阵为 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}'+\boldsymbol{Y}''$

三、串联



$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' = \dot{I}_1'' \qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_2' = \dot{I}_2''$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1' + \dot{U}_1'' \qquad \dot{U}_2 = \dot{U}_2' + \dot{U}_2''$$

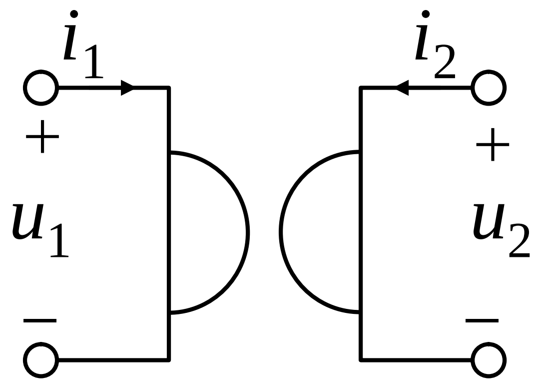
设：P_1、P_2的Z 参数分别为

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}'' = \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix}$$

则：$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}''$

§16-6 回转器和负阻抗变换器

一、回转器



回转器的图形符号

为线性非互易的多端元件，

理想回转器是一个理想二端口元件。

✓VCR：$\left.\begin{aligned} u_1 &= -r\, i_2 \\ u_2 &= r\, i_1 \end{aligned}\right\}$ 或 $\left.\begin{aligned} i_1 &= g\, u_2 \\ i_2 &= -g\, u_1 \end{aligned}\right\}$

r 和 g分别为回转电阻和回转电导，简称回转常数。

✓ 由端口方程得： $u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$

即理想回转器不消耗功率，是一个无源线性元件。

✓ 性质：把一个端口的电流 (电压)“回转” 为另一个端口的电压 (电流)。

功能：把一个电容回转为电感。

说明： $L = r^2C = C/g$

在输出端口有：

$$I_2(s) = -\,sC\,U_2(s)$$

由理想回转器的VCR：

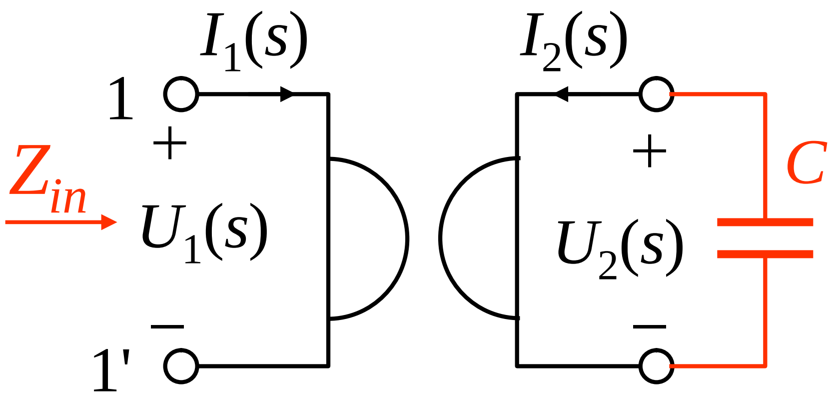
$$U_1(s) = -r\,I_2(s)$$
$$U_2(s) = r\,I_1(s)$$

可得：

$$U_1(s) = r\,sC\,U_2(s)$$
$$= r^2 sC\,I_1(s)$$

所以：

$$Z_{in} = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = s\,r^2\,C = s\,L$$



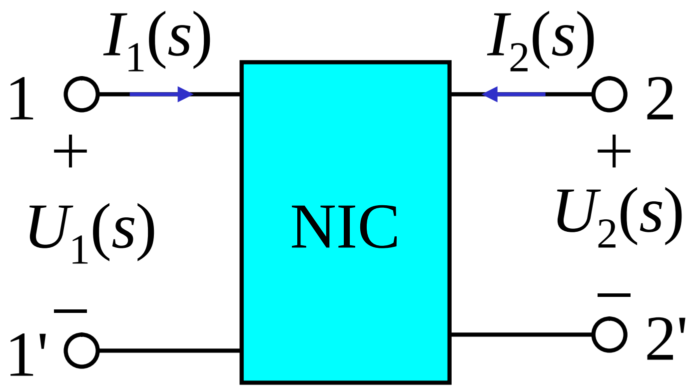
设： $C = 1\mu$， $r = 50\text{k}$

则： $L = 50{,}000^2 \times 10^{-6} = 2500\text{H}$

理想回转器的 Z 参数矩阵为 $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$

理想回转器的 Y 参数矩阵为 $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$

二、负阻抗变换器 (NIC)



NIC也是二端口的理想元件。

1. 用<u>*T* 参数描述</u>的VCR：

(1)电流反向型

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$$

特点：经传输后电压不变，$U_1(s) = U_2(s)$，

但电流变为$I_1(s) = kI_2(s)$，并改变了方向。

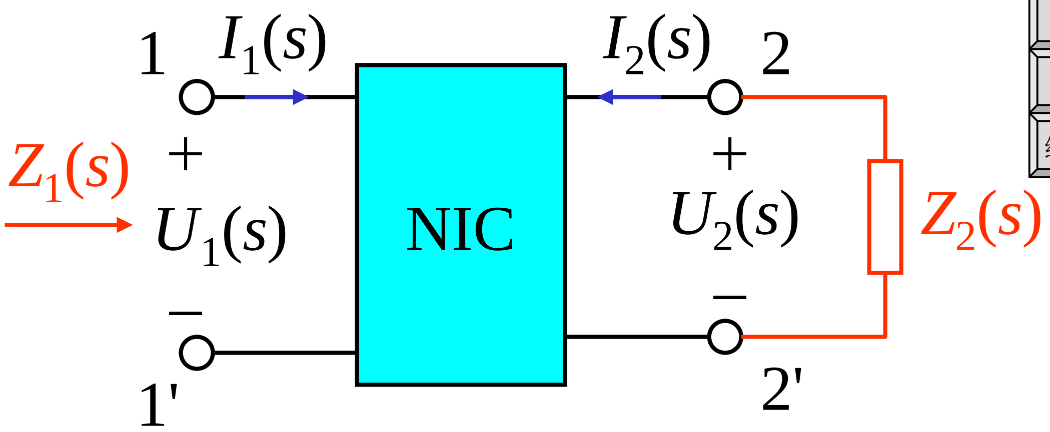
(2)电压反向型

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$$

特点：经传输后电流不变，$I_1(s) = -I_2(s)$，

但电压变为$U_1(s) = -kU_2(s)$，并改变了方向。

2. NIC的阻抗变换公式



对电流反向型

由 $U_1(s) = U_2(s)$

$I_1(s) = kI_2(s)$ 得

$$Z_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{U_2(s)}{kI_2(s)}$$

在输出端口

$$U_2(s) = -Z_2(s)I_2(s)$$

代入上式得:

$$Z_1(s) = -\frac{Z_2(s)}{k}$$

阻抗变换结果:

电阻 → 负电阻

正电感 →负电感

正电容 →负电容

本章结束