第二章　电阻电路的等效变换

内容提要

- 电阻的串联和并联，Y－△变换；
- 电源的串联和并联；
- 电源的等效变换；
- 一端口网络输入电阻的计算。

§2－1 引言

概念：

时不变线性电路：→ 由非时变线性无源元件、线性受控源和独立电源组成的电路，简称线性电路。

线性电阻电路：→ 构成线性电路的无源元件均为线性电阻。

直流电路：

电路中的独立电源都是直流电源。

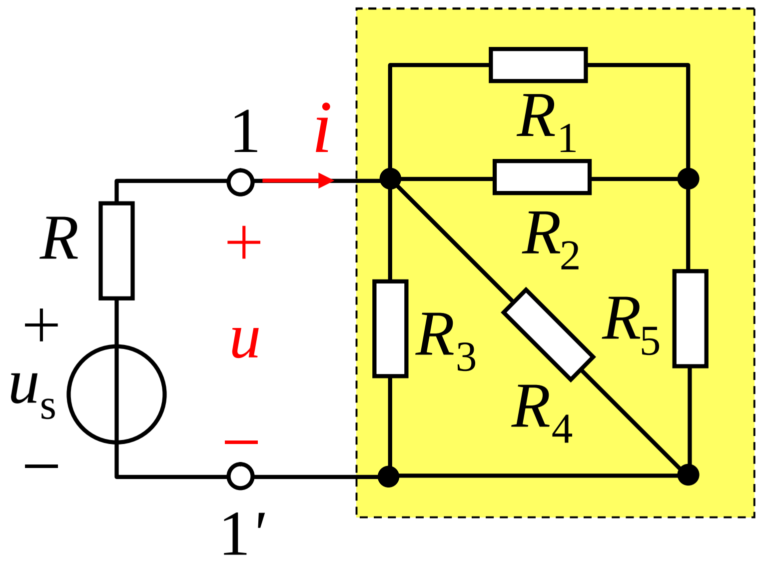
本章主要内容：简单电阻电路的分析计算。

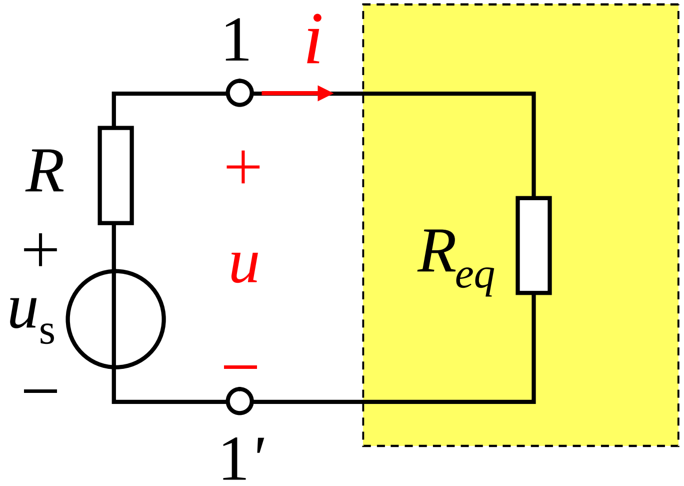
重点：等效变换的概念与等效变换。

难点：含受控源的一端口电阻网络的输入电阻的求解。

§2−2 电路的等效变换

- 等效(equivalence)：如果一个二端电路的伏安关系与另一个二端电路的伏安关系完全相同，则这两个二端电路是等效的。



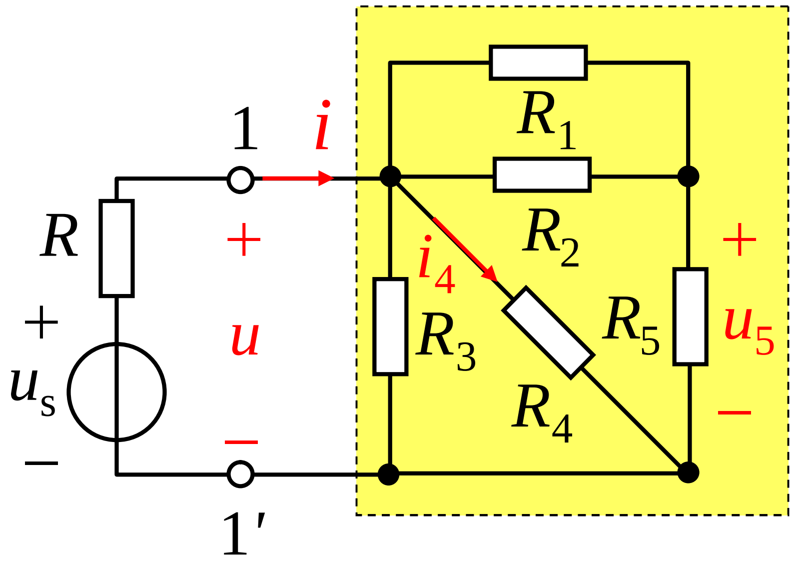


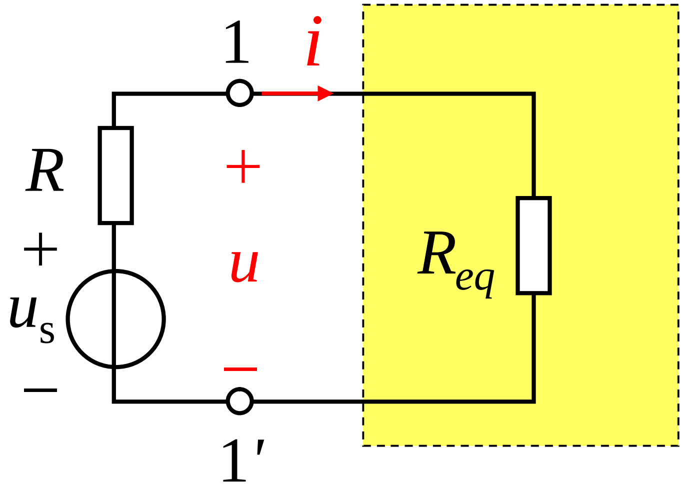
上面两个电路具有完全不同的结构，若端子1−1′以右部分的伏安关系相同。

则对任一外电路来说，它们是等效的，R_{eq}为等效电阻。

例如：欲求电流 i 和电压 u， 可以用R_{eq}替代端子1−1′ 以右的部分，使问题得到简化。

不过，虚线框内的电路，显然是不同的。

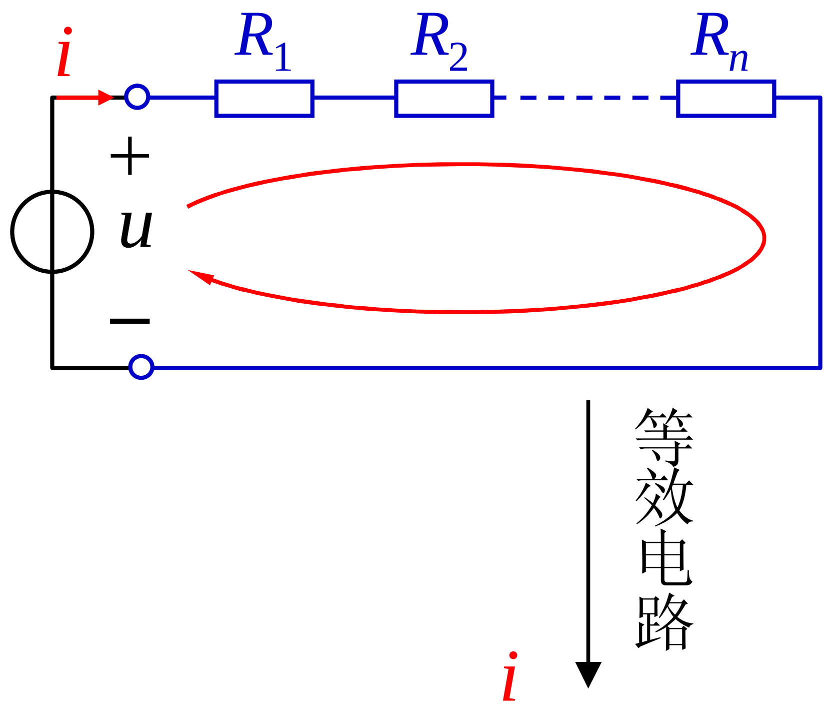




如果需要计算 i_4 和 u_5， 就必须回到原电路，用已求得的 i 和 u 计算。

§2－3 电阻的串联与并联

1. 电阻的串联



电阻串联时，每个电阻流过同一电流。

应用KVL：

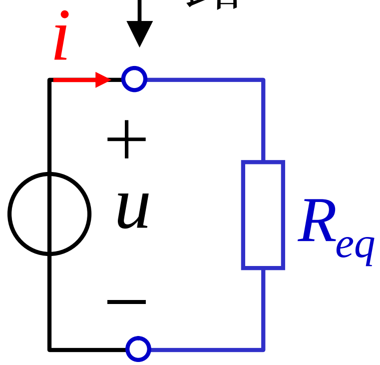
$$u = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_n i$$

$$= (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)\, i$$

$$u = R_{eq}\, i$$

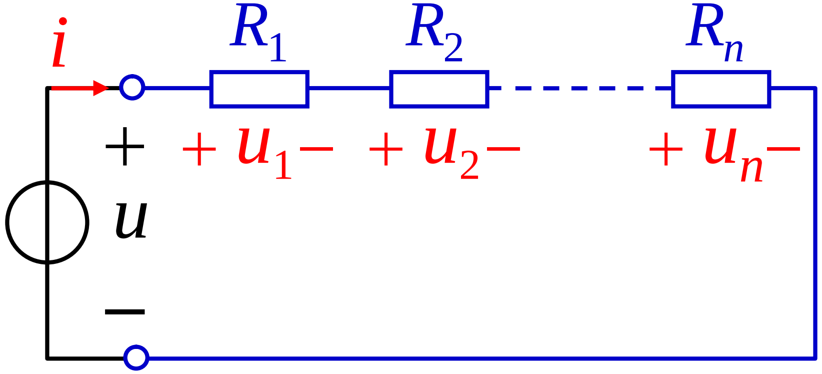
$$R_{eq} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} R_k$$

(1) 等效电阻R_{eq}必大于任一个串联的电阻。



(2)电压分配公式或分压公式

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}}$$

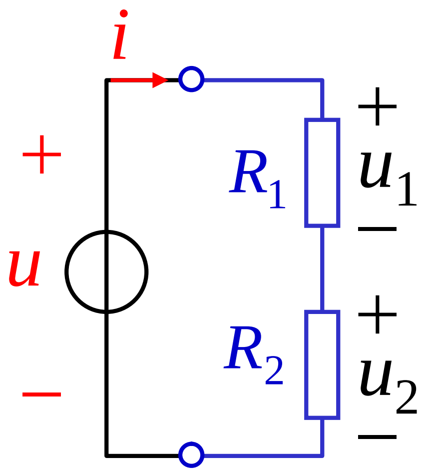


$$u_k = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} u$$

$k=1，2，\cdots，n$

串联的每个电阻，其电压值与电阻值成正比。

对于两个电阻：



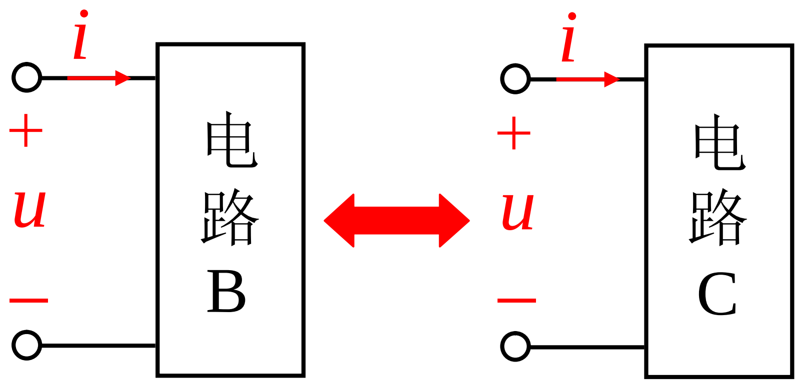
$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

温故知新

1. 电路等效变换的条件：两电路具有相同的VCR；

2. 等效后对<u>外电路</u>没有任何影响。



3. 电路等效变换的目的：
   化简电路，方便计算。

4. 电阻串联：

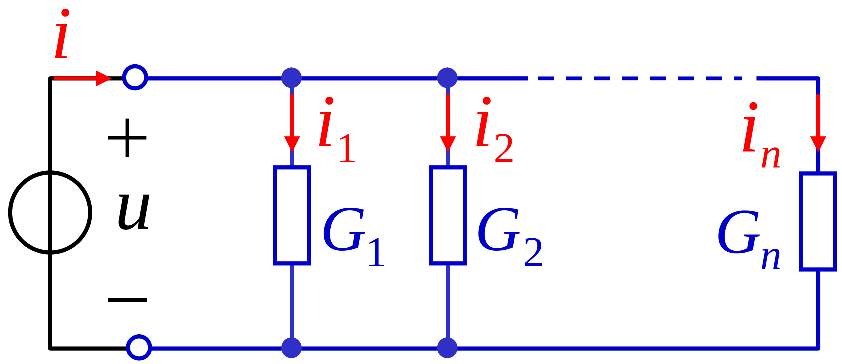
(1)等效电阻等于各分电阻之和,且大于任意一个串联的分电阻；

(2)各分电阻上的电压与阻值成正比，阻值大者分得的电压大。因此，串联电阻电路可作分压电路。

(3)各电阻消耗的功率与电阻大小成正比，即电阻值大者消耗的功率大；等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和。

2. 电阻的并联

电阻并联时，各电阻两端为同一电压。



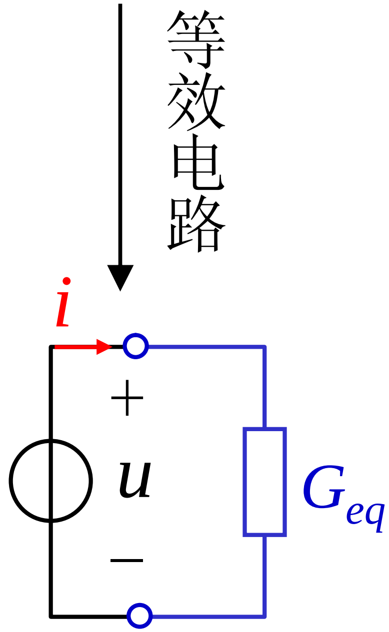
应用KCL：

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

$$= G_1 u + G_2 u + \cdots + G_n u$$

$$= (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)\, u$$

$$i = G_{eq}\, u$$

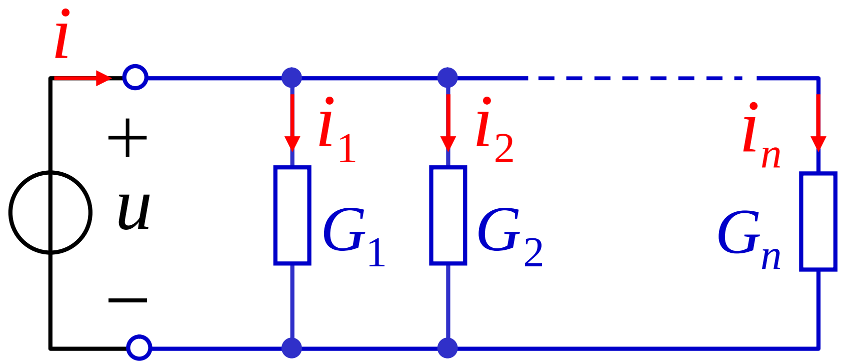


$$G_{eq} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} G_k$$

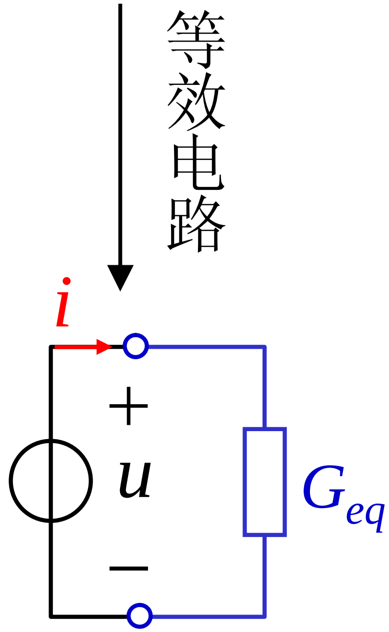
并联后的等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} G_k}$$

或者 $\dfrac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{R_k}$



等效电阻小于任一并联的电阻。



电流分配公式或分流公式

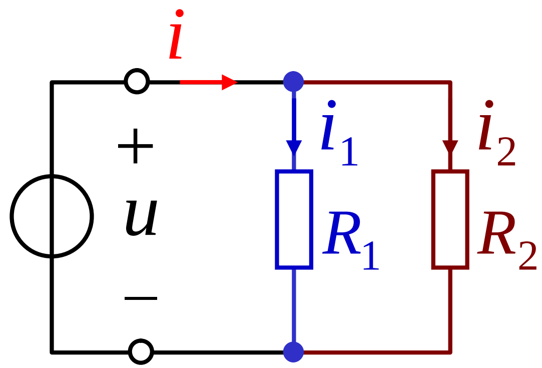
$$i_k = G_k u = G_k \frac{i}{G_{eq}}$$

$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i \longrightarrow$$

每个并联电阻中的电流与它们各自的电导成正比。

$k = 1，2，\cdots，n$

两个电阻并联时



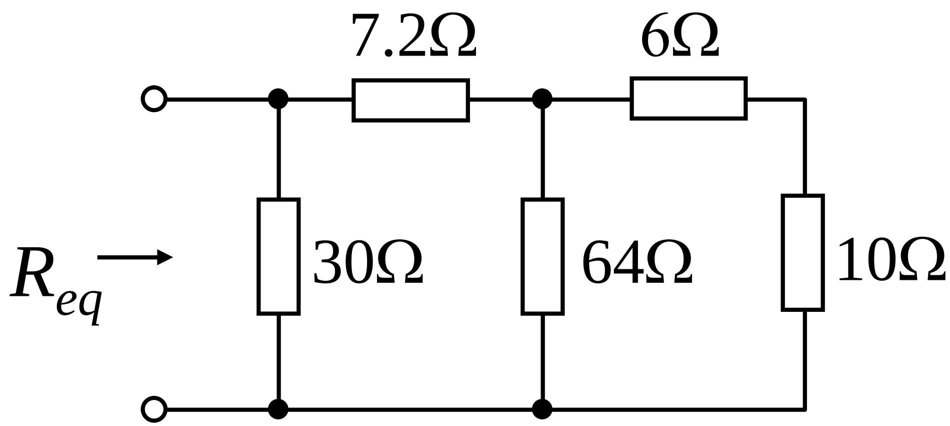
$$i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\, i = \frac{\frac{1}{\cancel{R_1}}}{\frac{R_1+R_2}{\cancel{R_1}R_2}}\, i$$

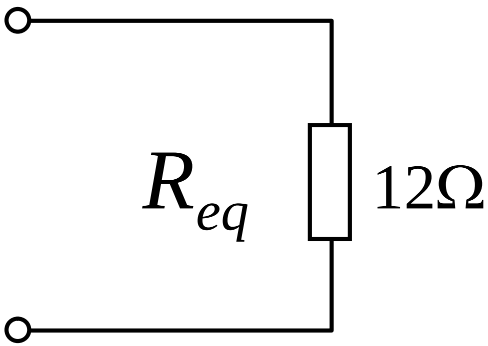
$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}}\, i$$

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, i$$ 同理： $$i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, i$$

3. 电阻的混联

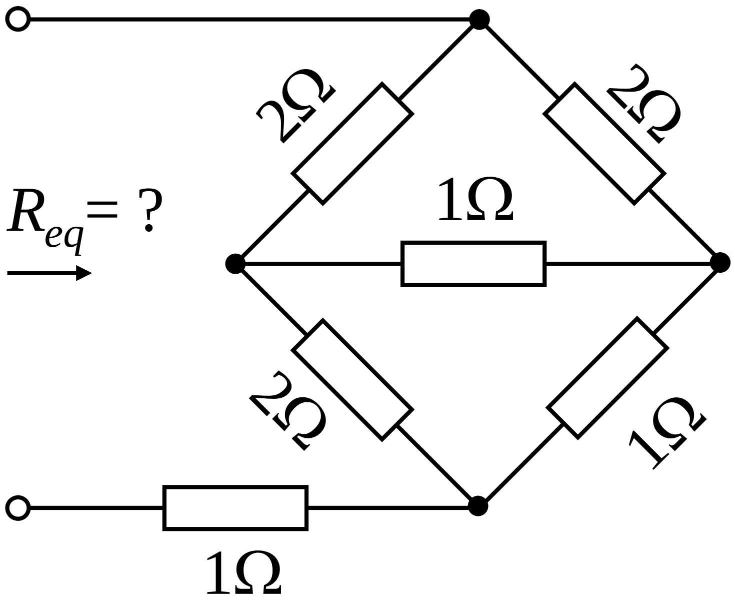
当电阻的连接中既有串联，又有并联时简称**混联**。





$$\frac{64\times 16}{64+16}=12.8\Omega$$

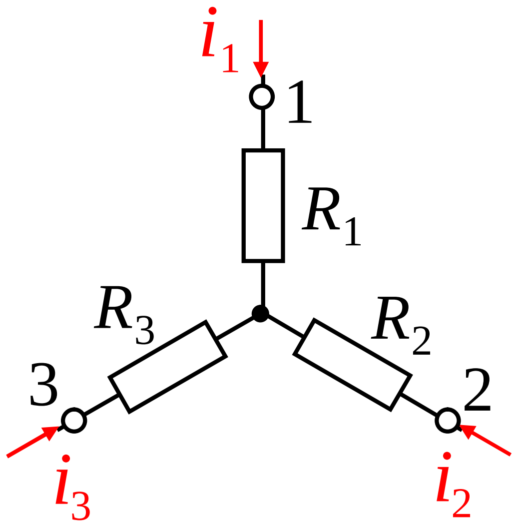
$$R_{eq}=\frac{30\times 20}{30+20}=12\Omega$$

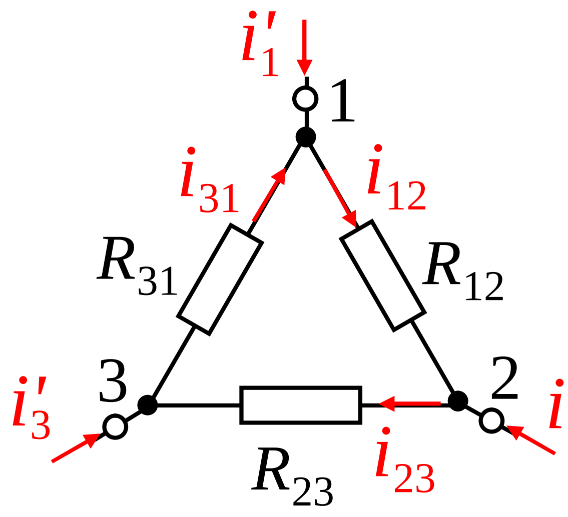


用简单串并联的方法解决不了这个问题，这说明我们的知识面还不宽，本事还不够，还要继续学习。

§2－4 电阻的Y形联接和△形联接的等效变换

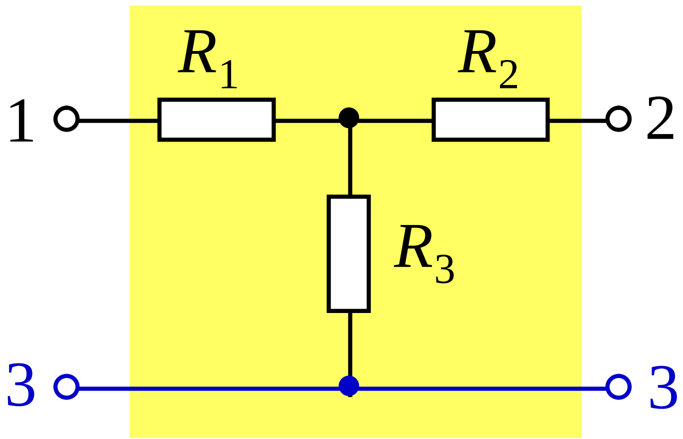
1. 星(Y)形联接，
也叫T形联接。

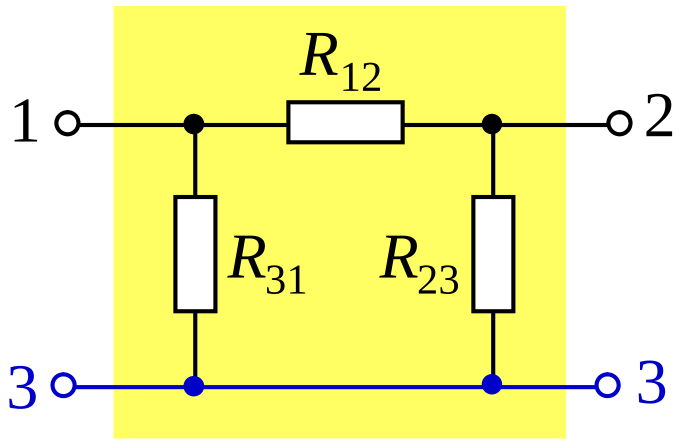




2. 三角(△)形联接，
亦称Π形联接。

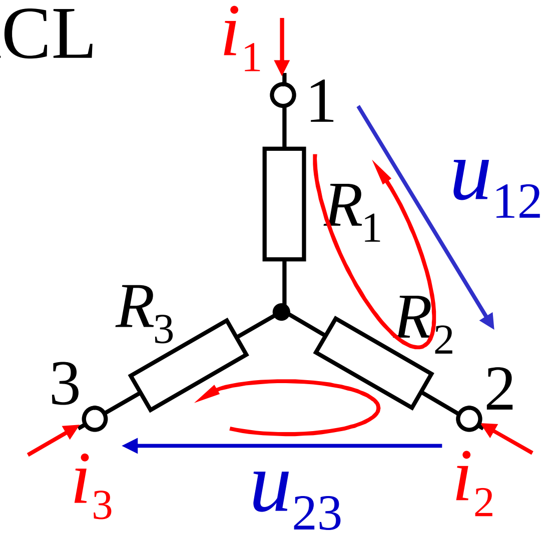
3. 等效变换
条件：

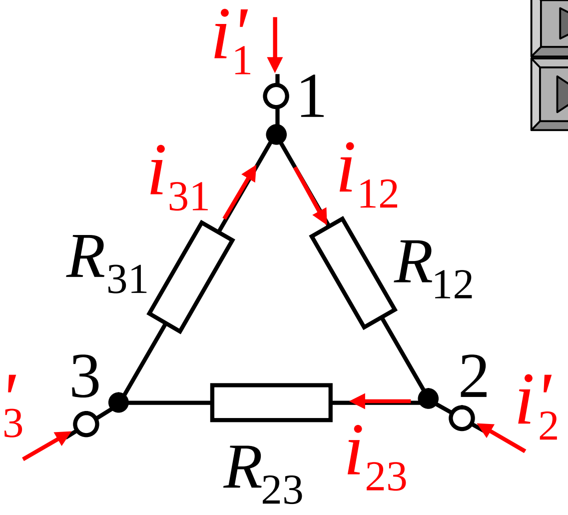




对应端子间的电压相等，同时，流入对应端子的电流也分别相等。

Y→△　　对△用KCL





$$\left.\begin{aligned} i'_1 &= \frac{u_{12}}{R_{12}} - \frac{u_{31}}{R_{31}} \\ i'_2 &= \frac{u_{23}}{R_{23}} - \frac{u_{12}}{R_{12}} \\ i'_3 &= \frac{u_{31}}{R_{31}} - \frac{u_{23}}{R_{23}} \end{aligned}\right\}$$

对Y用KCL和KVL

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ R_1 i_1 - R_2 i_2 = u_{12} \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 = u_{23} \end{cases}$$

解之得：

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_3 u_{12} - R_2 u_{31}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ i_2 &= \frac{R_1 u_{23} - R_3 u_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{aligned}\right\}$$

$$i_3 = \frac{R_2 u_{31} - R_1 u_{23}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Y → △

$$i'_1 = \frac{u_{12}}{R_{12}} - \frac{u_{31}}{R_{31}}$$

$$i'_2 = \frac{u_{23}}{R_{23}} - \frac{u_{12}}{R_{12}}$$

$$i'_3 = \frac{u_{31}}{R_{31}} - \frac{u_{23}}{R_{23}}$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$i_1 = \frac{R_3 u_{12} - R_2 u_{31}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$i_2 = \frac{R_1 u_{23} - R_3 u_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

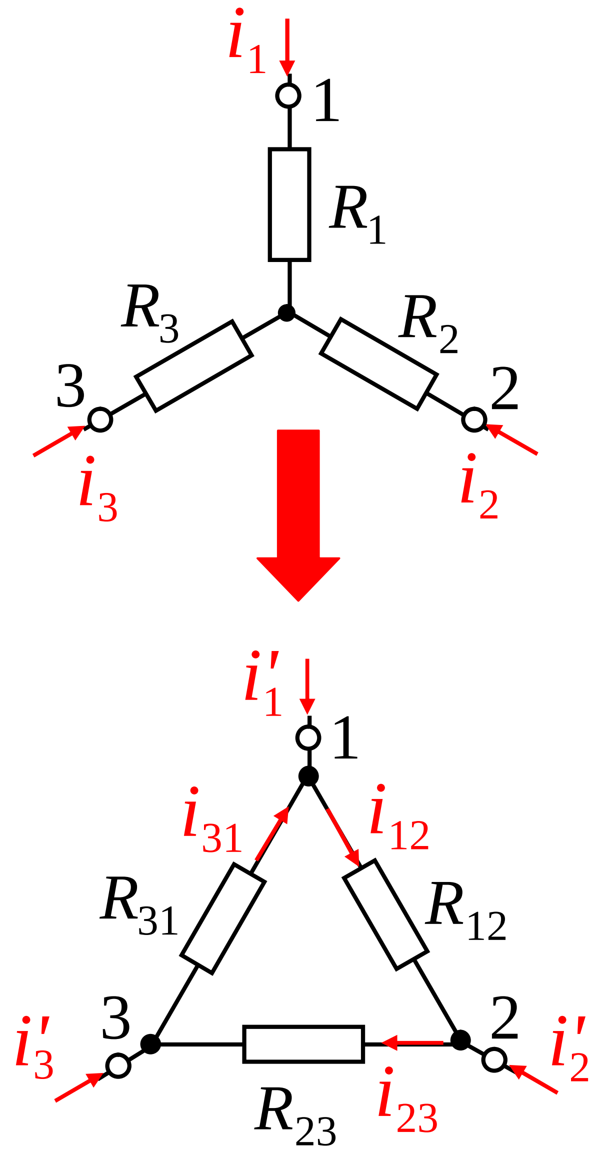
$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$\begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\[2ex] R_{31} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \\[2ex] R_{23} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \end{cases}$$

$$R_{\triangle} = \frac{\text{Y形}R\text{两两乘积之和}}{\text{Y形不相邻}R}$$

若 $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$，

则 $R_{12} = R_{23} = R_{31} = \underline{R_{\triangle} = 3R_Y}$



$\triangle \rightarrow Y$

$$\left\{\begin{array}{l} R_{12} = \dfrac{\boxed{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}}{R_3} \\ + \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ + \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{array}\right.$$

$$R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1 = \underline{\underline{R_{12}R_3}} = R_{23}R_1 = \underline{\underline{R_{31}R_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{12}+R_{23}+R_{31} = \frac{R_{31} \qquad R_{12}}{R_1}$$

为了求出$R_1 \sim R_3$，将以上三式相加并整理。

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

用类似的方法可求得R_2、R_3：

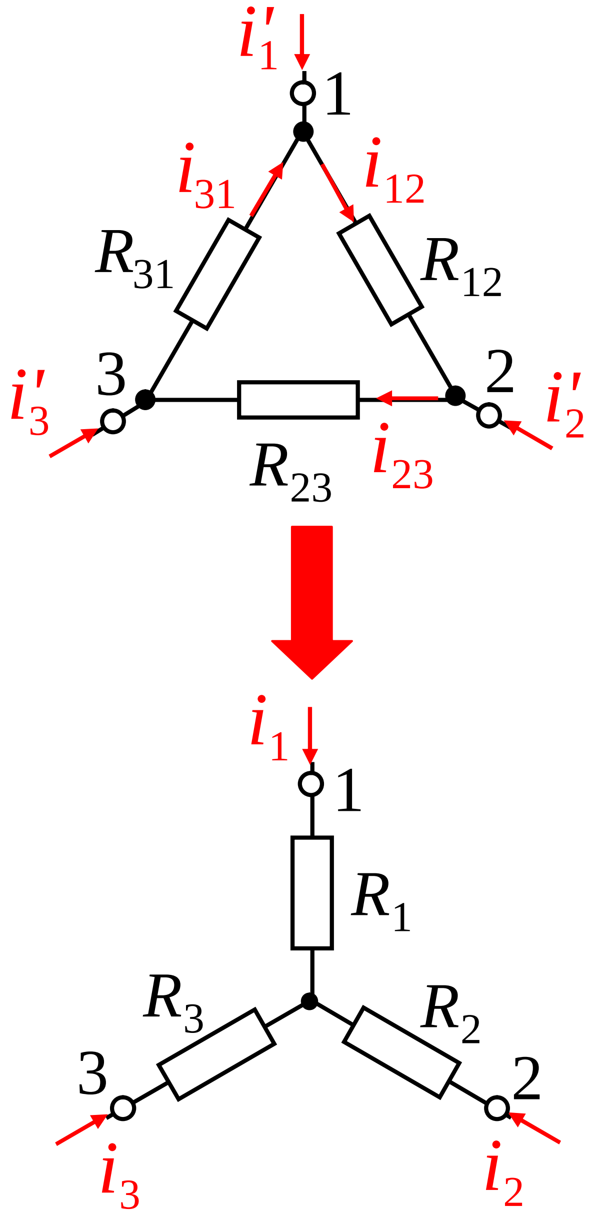
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_Y = \frac{\text{△形相邻}R\text{的乘积}}{\text{△形}R\text{之和}}$$

Y —△变换式也可以用电导表示：(略)



Y—△变换总结

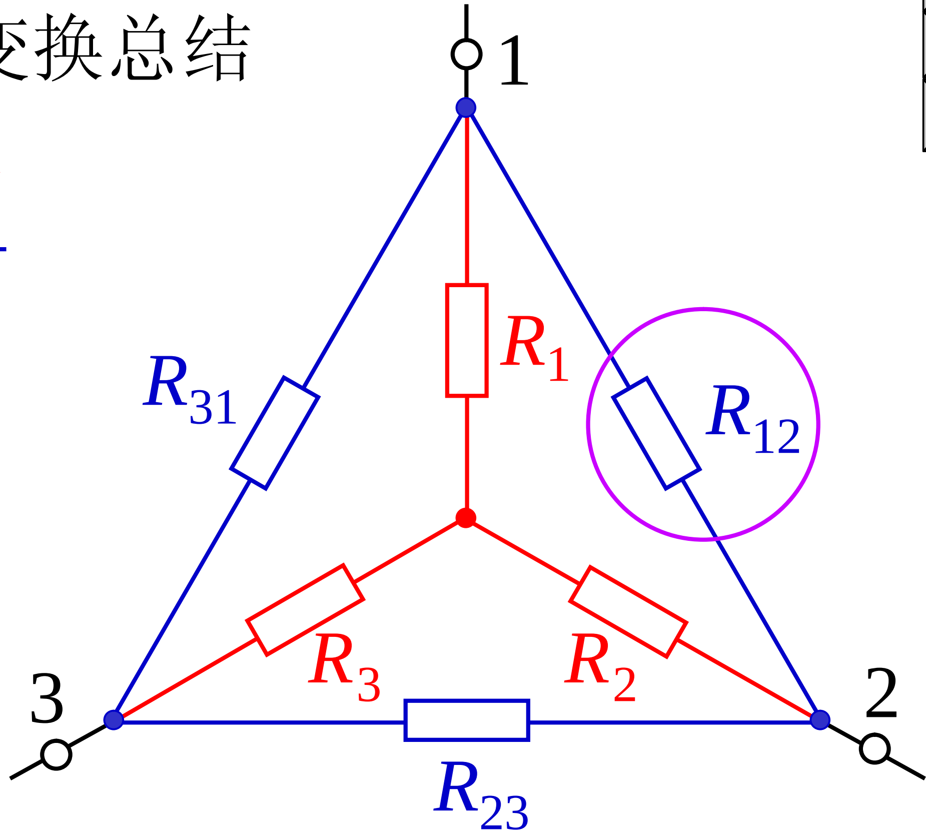
$$R_{\triangle} = \frac{\text{Y形}R\text{两两乘积之和}}{\text{Y形不相邻}R}$$

$R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$

求R_{12} — 除R_3

求R_{23} — 除R_1

求R_{31} — 除R_2



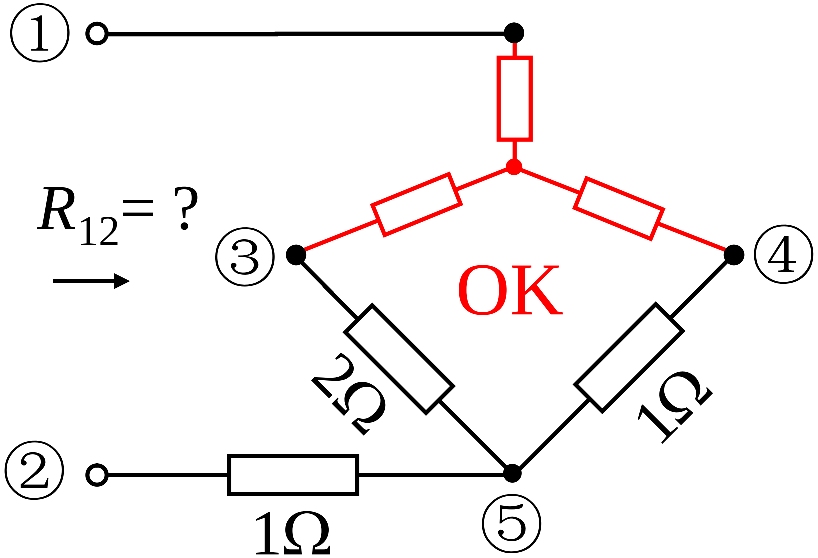
$$R_Y = \frac{\triangle\text{形相邻}R\text{的乘积}}{\underbrace{\triangle\text{形}R\text{之和}}_{R_{12}+R_{23}+R_{31}}}$$

求R_1 — 为 $R_{12}R_{31}$

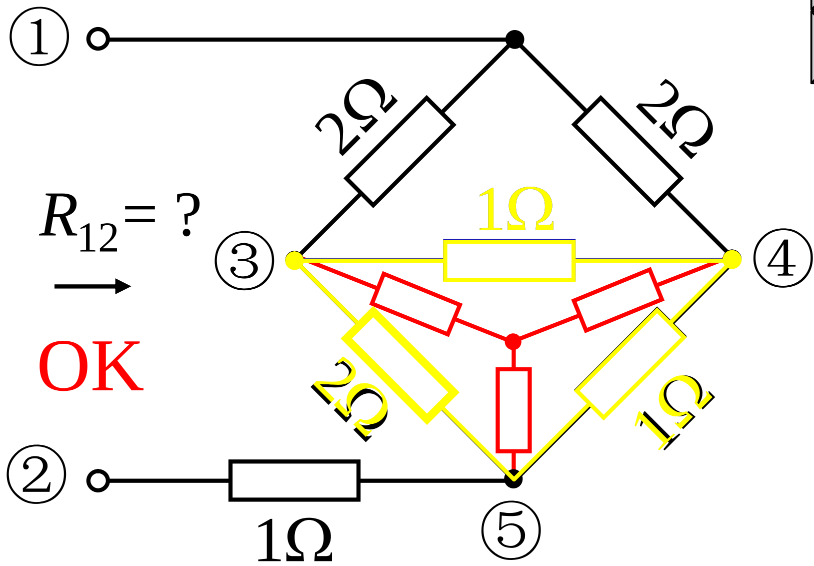
R_2 — $R_{23}R_{12}$

R_3 — $R_{31}R_{23}$

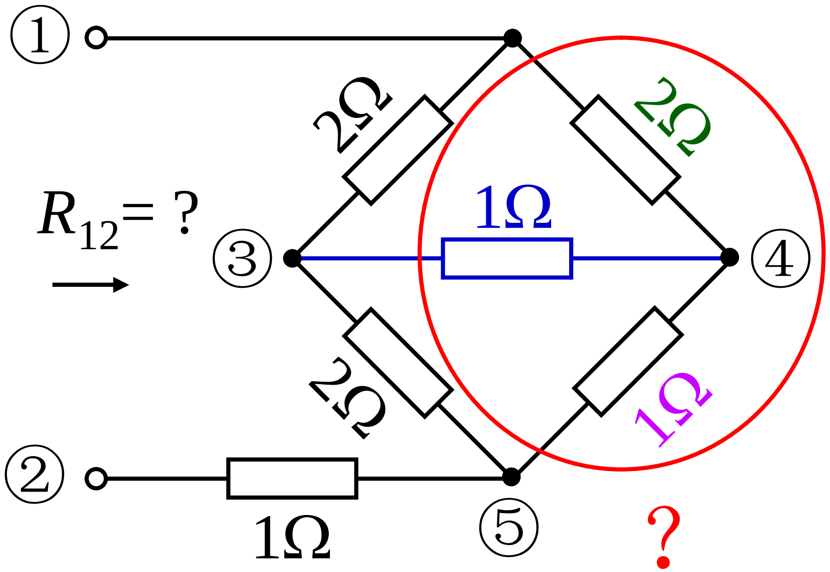
教材P39例2–2



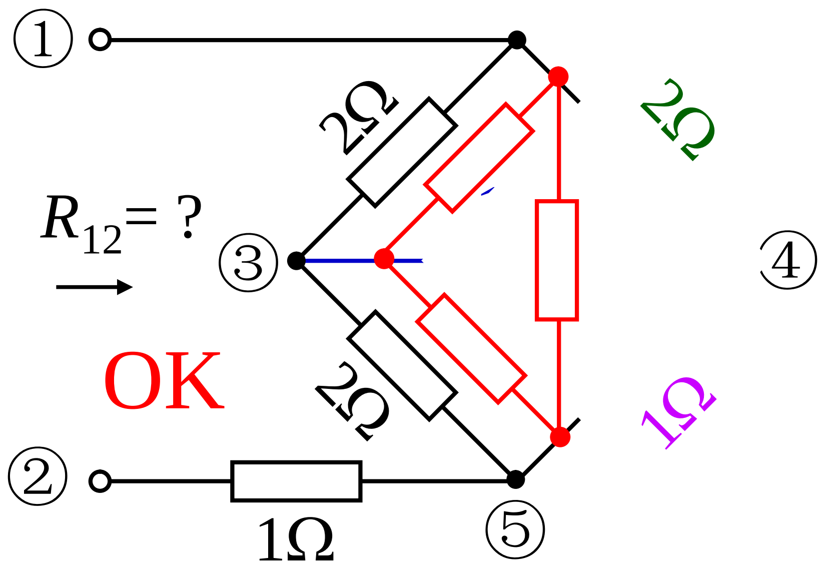
①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
OK
2Ω
1Ω
1Ω



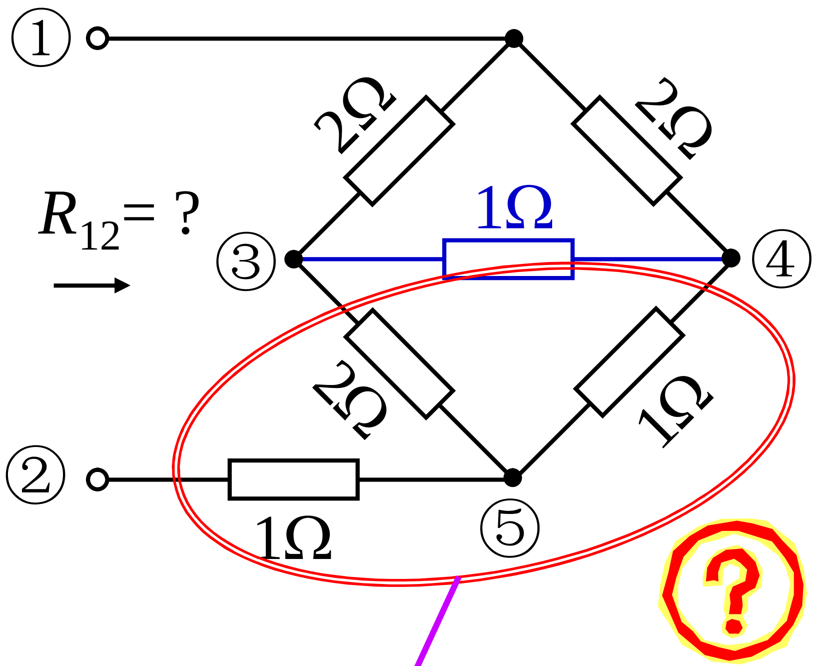
①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
OK
2Ω
2Ω
1Ω
2Ω
1Ω
1Ω



①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
2Ω
2Ω
1Ω
2Ω
1Ω
1Ω
?

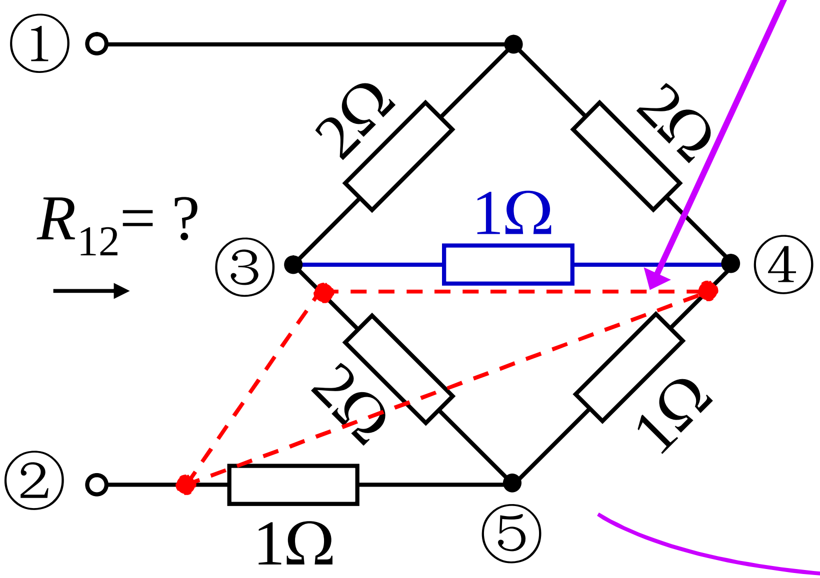


①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
OK
2Ω
2Ω
2Ω
1Ω
1Ω

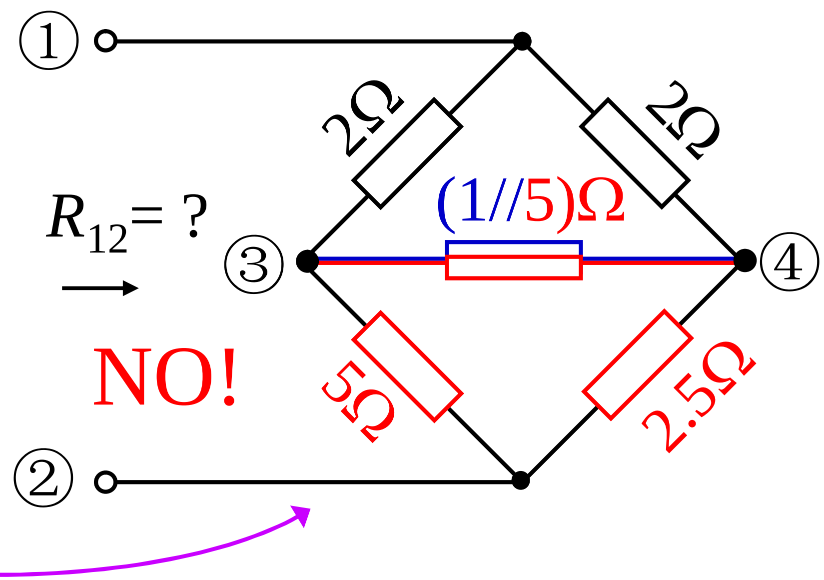


①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
2Ω
2Ω
1Ω
2Ω
1Ω
1Ω

解题指导
单击此处



①
②
③
④
⑤
R_{12}= ?
2Ω
2Ω
1Ω
2Ω
1Ω
1Ω



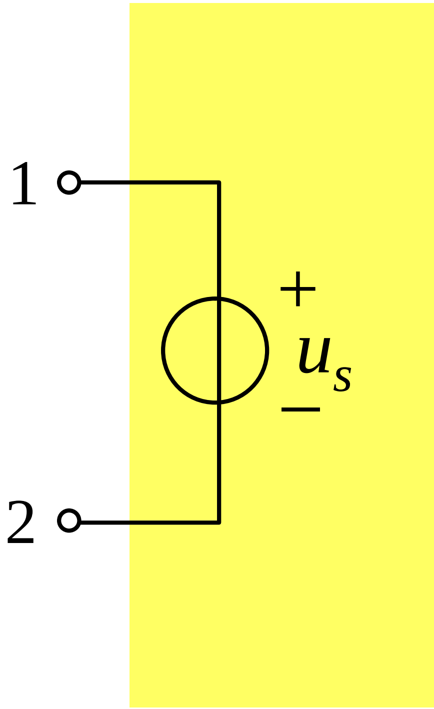
①
②
③
④
R_{12}= ?
2Ω
2Ω
(1//5)Ω
5Ω
2.5Ω
NO!

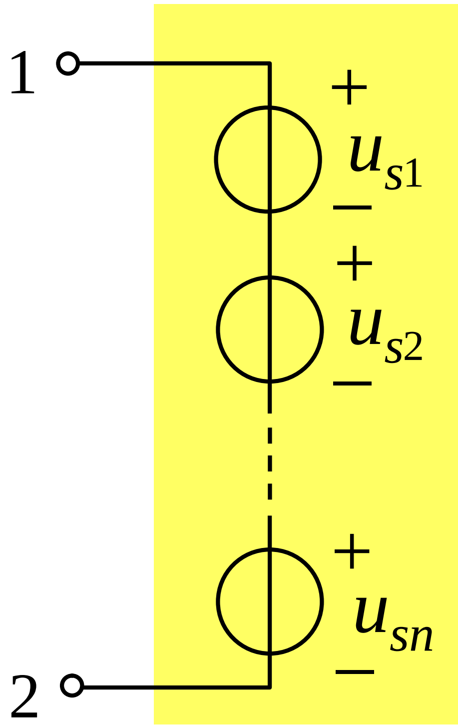
§2—5 电压源、电流源的串联和并联

1. *n*个电压源串联，可以等效成一个电压源：

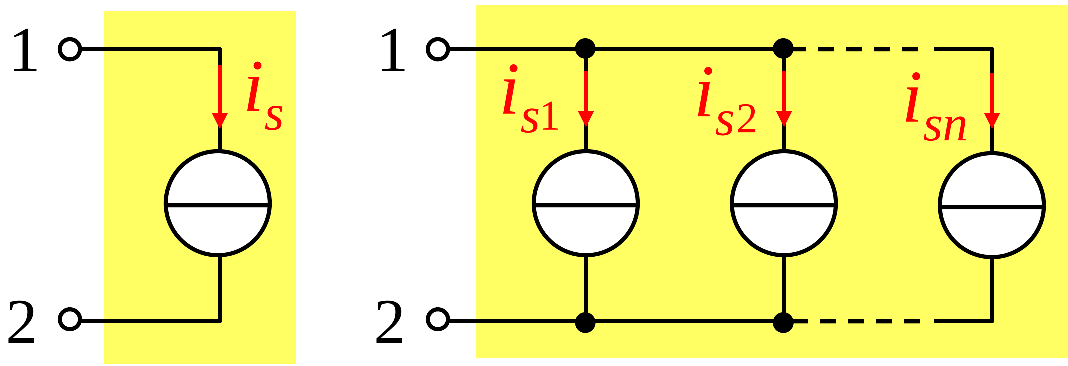
$$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_{sk}$$

若u_{sk}与u_s的参考方向一致，则式中u_{sk}前面取“+”，否则取“–”。





2. n个电流源并联，可以等效成一个电流源：



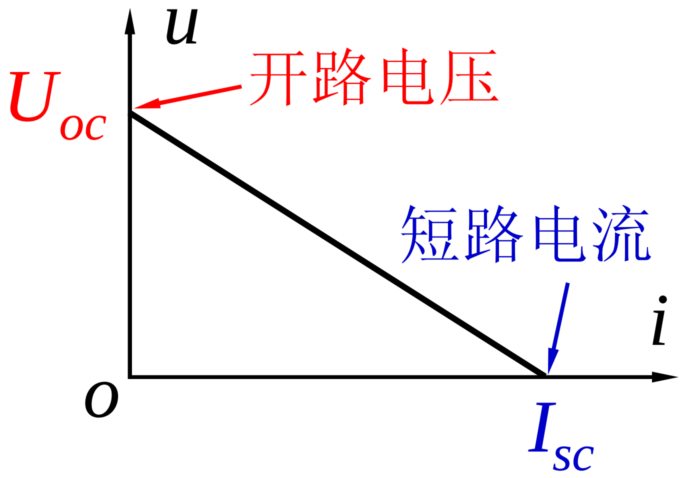
$$i_s = \sum_{k=1}^{n} i_{sk}$$

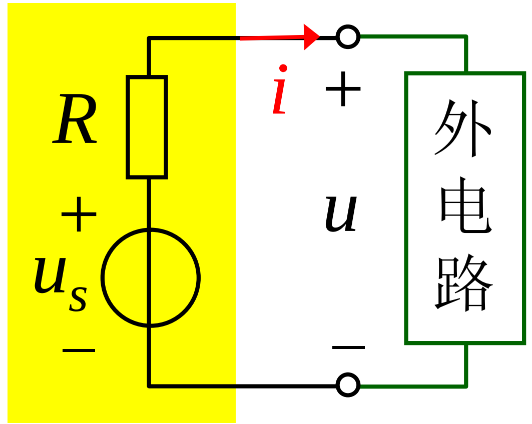
若i_{sk}与i_s的参考方向一致，则式中i_{sk}前面取“+”，否则取“–”。

- 只有电压相等极性一致的电压源才允许并联，其等效电路为其中任一电压源。
- 只有电流相等方向一致的电流源才允许串联，其等效电路为其中任一电流源。
- 否则将违背KVL或KCL。

§2－6 实际电源的两种模型及其等效变换

- 实际电源都含有内阻，它的模型是**电压源与电阻的串联组合**或**电流源与电阻的并联组合**。





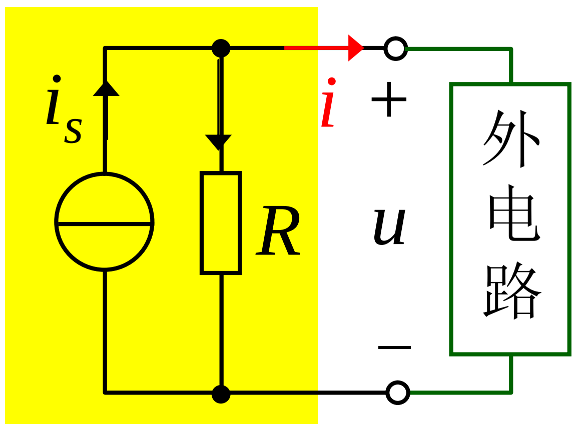
$u=u_s-Ri$

$u_{oc}=u_s$

$i_{sc}=\dfrac{u_s}{R}$

$i_s=\dfrac{u_s}{R}$

$u_s=i_sR$



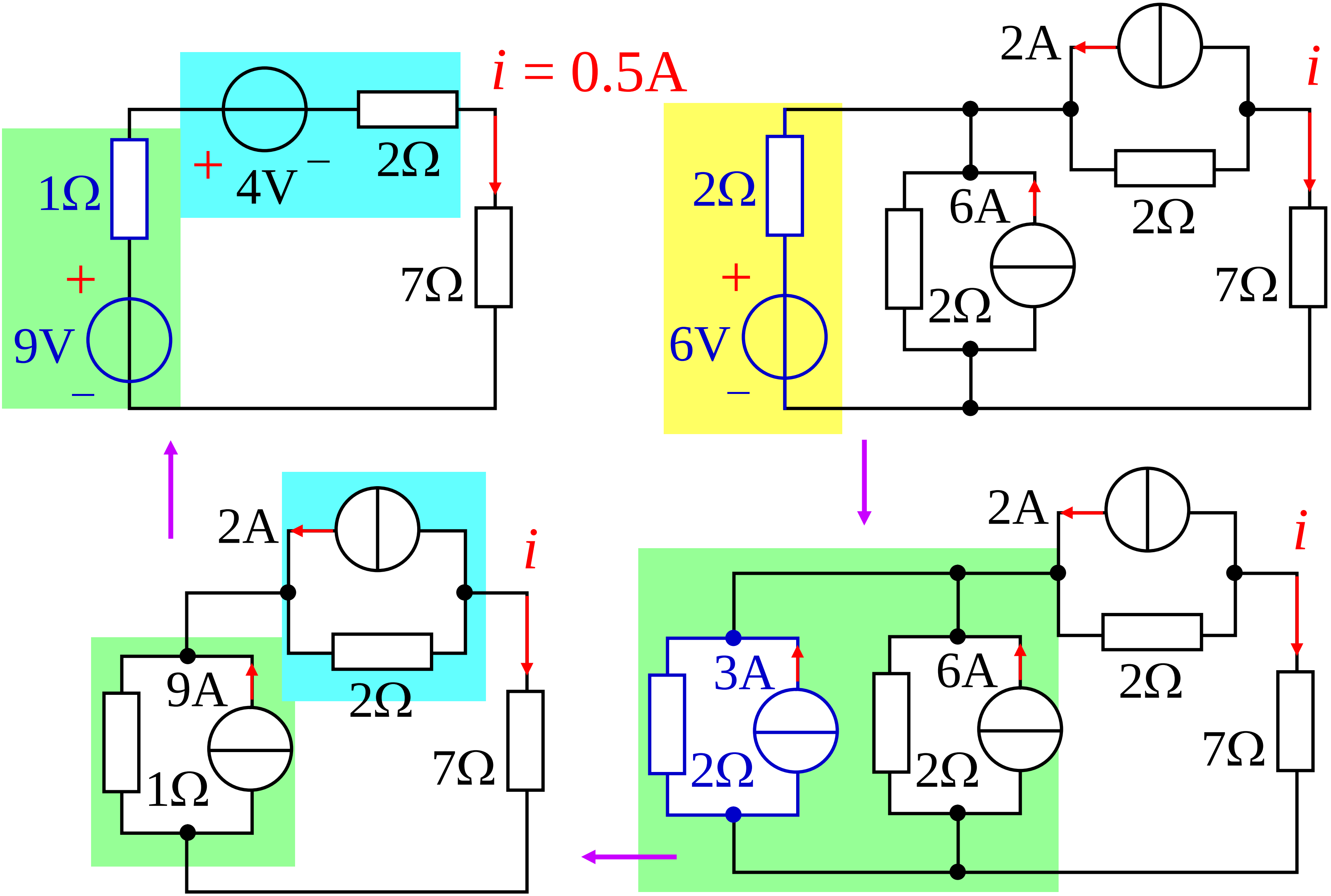
$i=i_s-\dfrac{1}{R}u$

$u_{oc}=i_sR$

$i_{sc}=i_s$

- 对外电路等效，内部电路并不等效。

教材P43–44 例2–3



i = 0.5A
1Ω
+
9V
−
+
4V
−
2Ω
7Ω
2A
i
2Ω
+
6V
−
6A
2Ω
2Ω
7Ω
2A
i
2Ω
9A
1Ω
7Ω
2A
i
3A
2Ω
6A
2Ω
2Ω
7Ω

温故知新

1. 判别串并联关系掌握4点：

(1)看电路的结构特点。

若两电阻是首尾相联就是串联，是首首尾尾相联就是并联。

(2) 看电压电流关系。

若流经两电阻的电流是同一个电流，那就是串联；

若两电组上承受的是同一个电压，那就是并联。

(3) 对电路作变形等效。

如：左边的支路扭到右边，上面的支路翻到下面，弯曲的支路拉直等；对电路中的短线路可以任意压缩与伸长；对多点接地可以用短路线相连。一般，如果真正是电阻串并联电路的问题，都可以判别出来。

(4) 找出等电位点。

对于具有对称特点的电路，若能判断某两点是等电位点，则根据电路等效的概念，一是可以用短接线把等电位点联起来；二是把联接等电位点的支路断开（因支路中无电流），从而得到电阻的串并联关系。

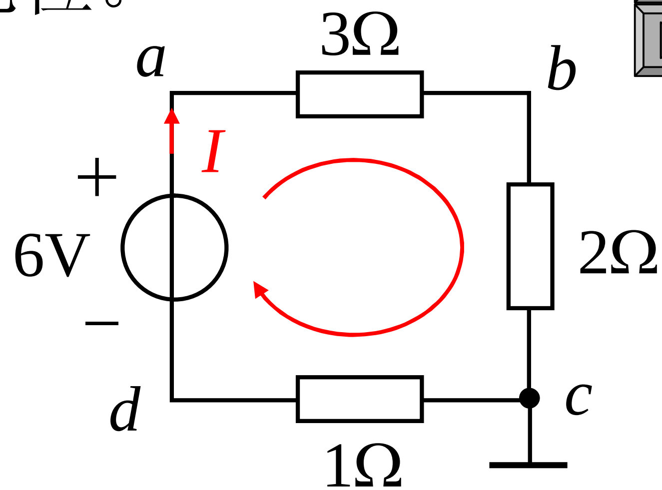
电位的定义：单位正电荷q 从电路中一点移至参考点时，电场力做功的大小。正电荷在电路中电能的得与失，体现为电位的升高和降低，即电位升和电位降。

①电路中电位参考点可任意选择；

②参考点一选定，电路中各点电位值是唯一的；

③当选择不同的电位参考点时，电路中各点电位值将改变，但任意两点间电压保持不变。

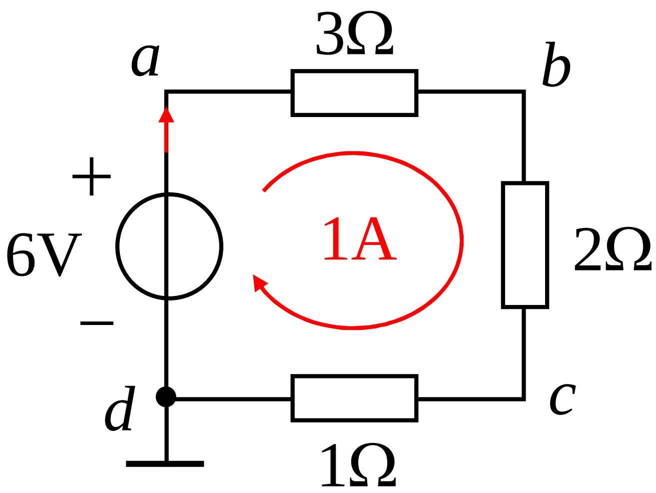
例：以c为参考点，求其它各点的电位。



解：$U_C = 0$　　求得：$I = 1\text{A}$

$U_a = 5\text{V}$，$U_b = 2\text{V}$，$U_d = -1\text{V}$

又：若以d为参考点，各点的电位是多少？



$U_d = 0$　　$U_a = 6\text{V}$，

$U_C = 1\text{V}$，$U_b = 3\text{V}$，

当选择不同的电位参考点时，电路中各点电位值将改变，但任意两点间电压保持不变。

2. △—Y 电路的等效变换属于多端子电路的等效。

等效是对外部(端钮以外)电路有效，对内不成立 。

用于简化电路。

3. 电压源、电流源的串联和并联，不能违反约束。

n个 电压源串联可得较高的电压。
n个电流源并联可得较大的电流。

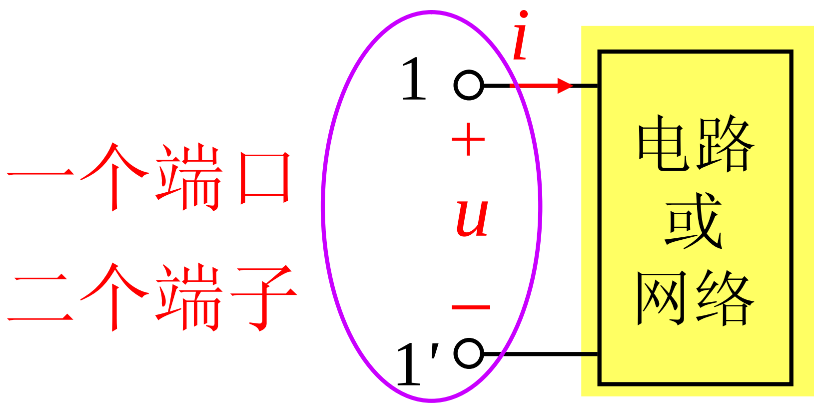
4. 电源互换是电路等效变换的一种方法。

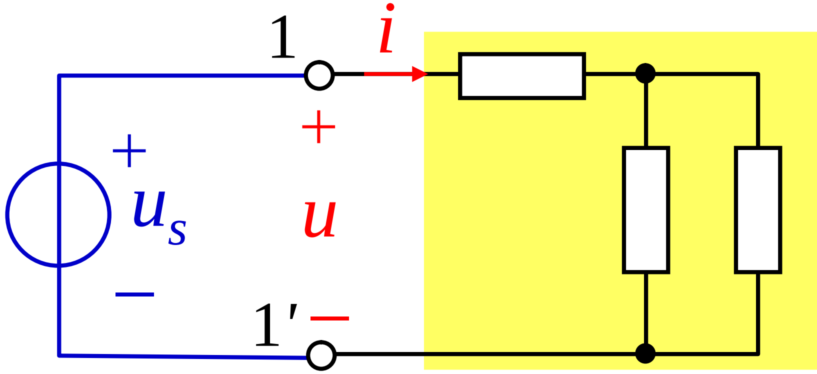
对外电路等效，对电源内部电路是不等效 。

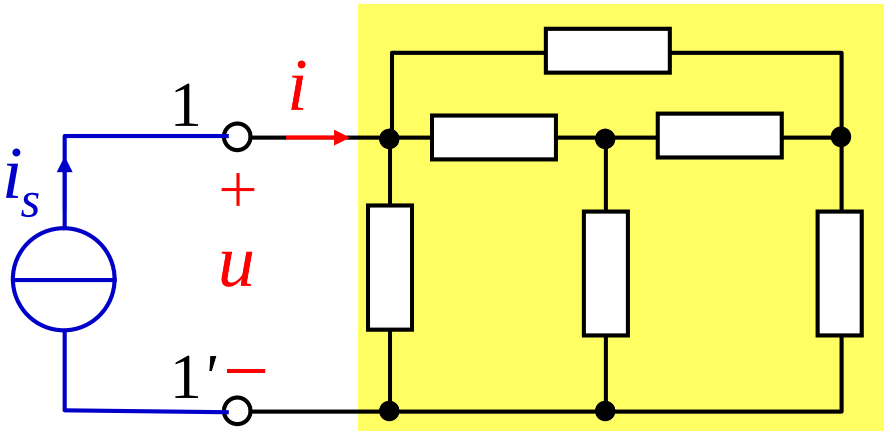
理想电压源与理想电流源不能相互转换，因为两者的定义本身是相互矛盾的，不会有相同的VCR 。

§ 2－7 输入电阻

- 如果一个网络具有两个引出端与外电路相连接，而不管其内部结构如何，这样的网络叫做一端口网络或二端网络。
- 从一个端子流入的电流一定等于从另一个端子流出的电流。



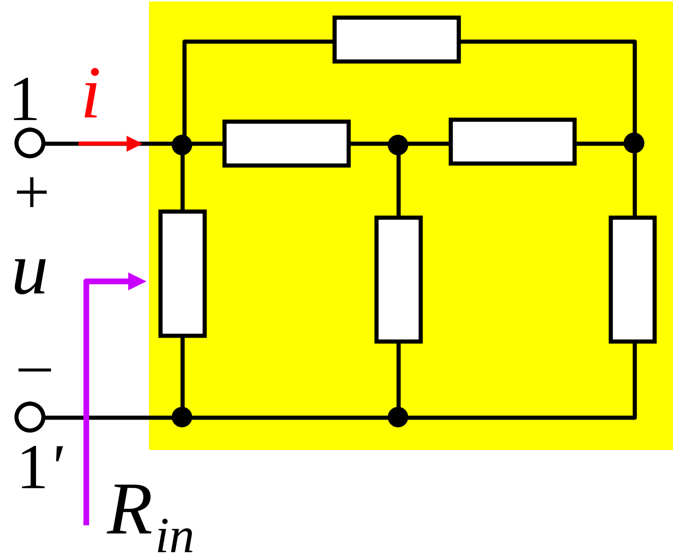




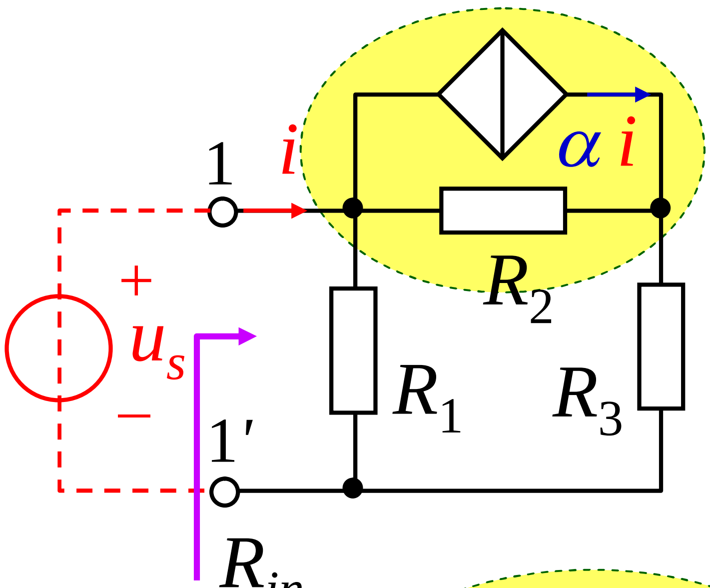
若一端口内部仅含电阻，则可以用电阻的串、并联和Y−△变换等方法求得其等效电阻。

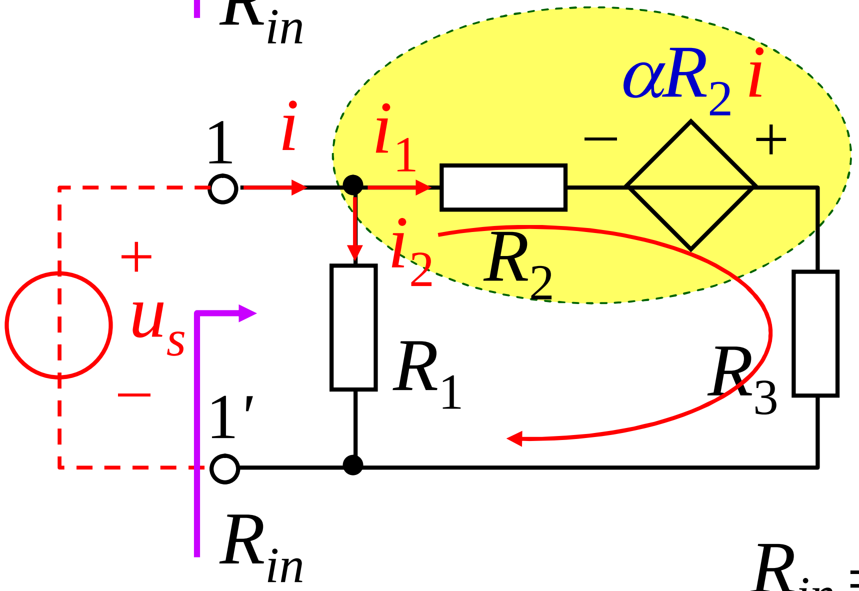
- 当一端口内部含电阻和受控源时，可以通过计算输入电阻来求得等效电阻。
- 由于端口电压与端口电流成正比，因此：

$$R_{in} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{u}{i}$$



- 可见，输入电阻是不含独立电源的一端口网络的端电压与端电流的比值。
- 等效电阻则是用来等效替代此一端口的电阻。
- R_{in}和R_{eq}的含义不同，但数值相等。





教材P46 例2－5

$$u_s = -\alpha R_2 i + (R_2+R_3) i_1$$

$$i_2 = \frac{u_s}{R_1}$$

$$i_1 = i - i_2 = i - \frac{u_s}{R_1}$$

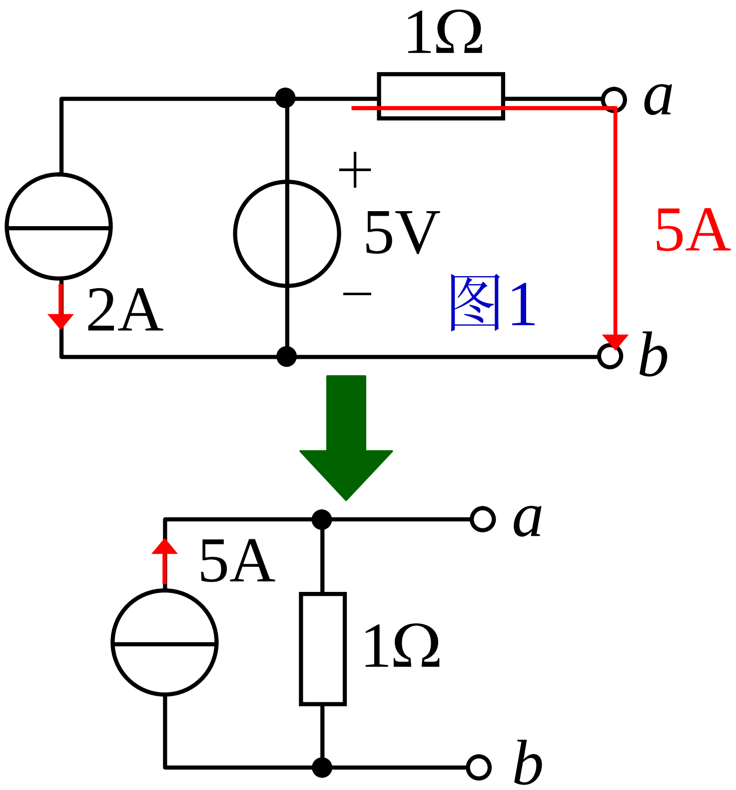
$$u_s = -\alpha R_2 i + (R_2+R_3)\left(i - \frac{u_s}{R_1}\right)$$

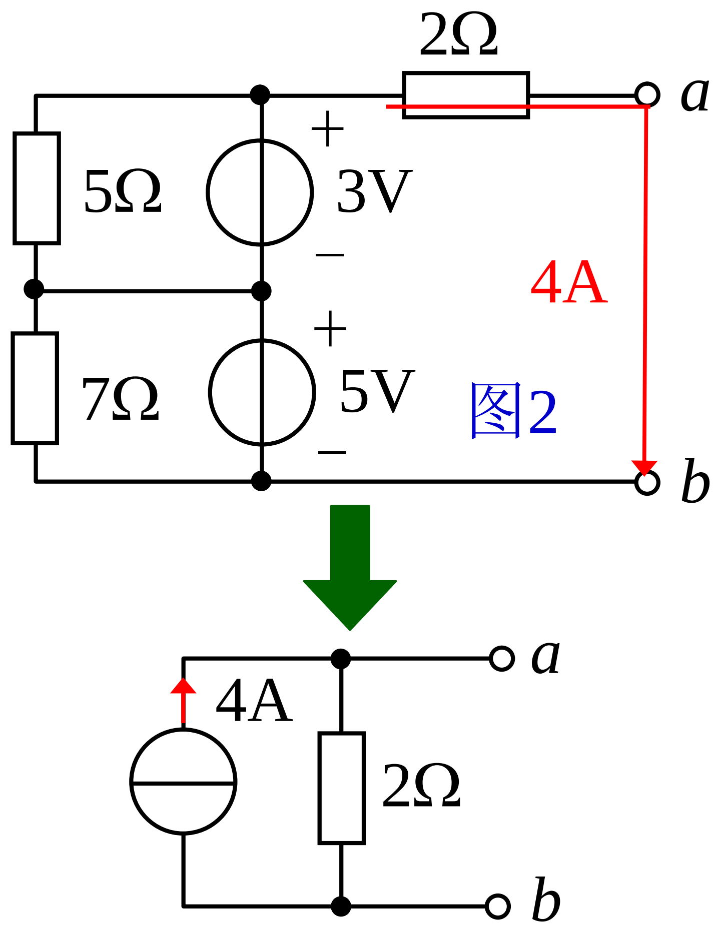
$$u_s + \frac{(R_2+R_3)}{R_1} u_s$$

$$= -\alpha R_2 i + (R_2+R_3)\, i$$

$$R_{in} = \frac{u_s}{i} = \frac{(R_1R_3) + (1-\alpha) R_1 R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

补充练习题　　1.将下图用等效电流源替代。





输入电阻是不含独立电源的一端口网络的端电压与端电流的比值。电压源短路，电流源开路，*ab*端口呈现的电阻。

2.将以下图用等效电压源替代。

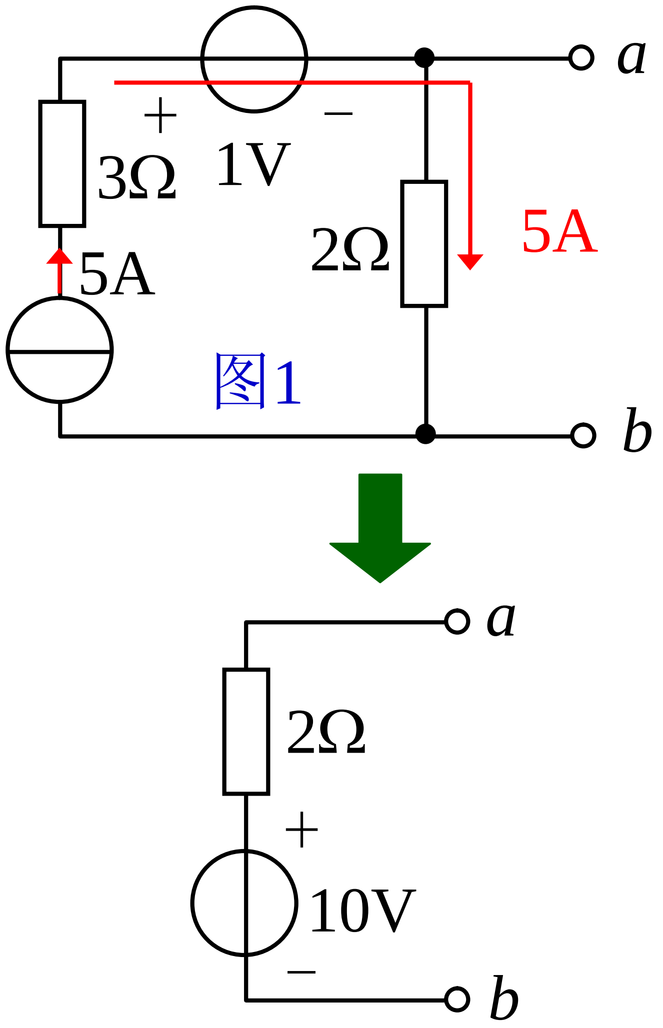


图1

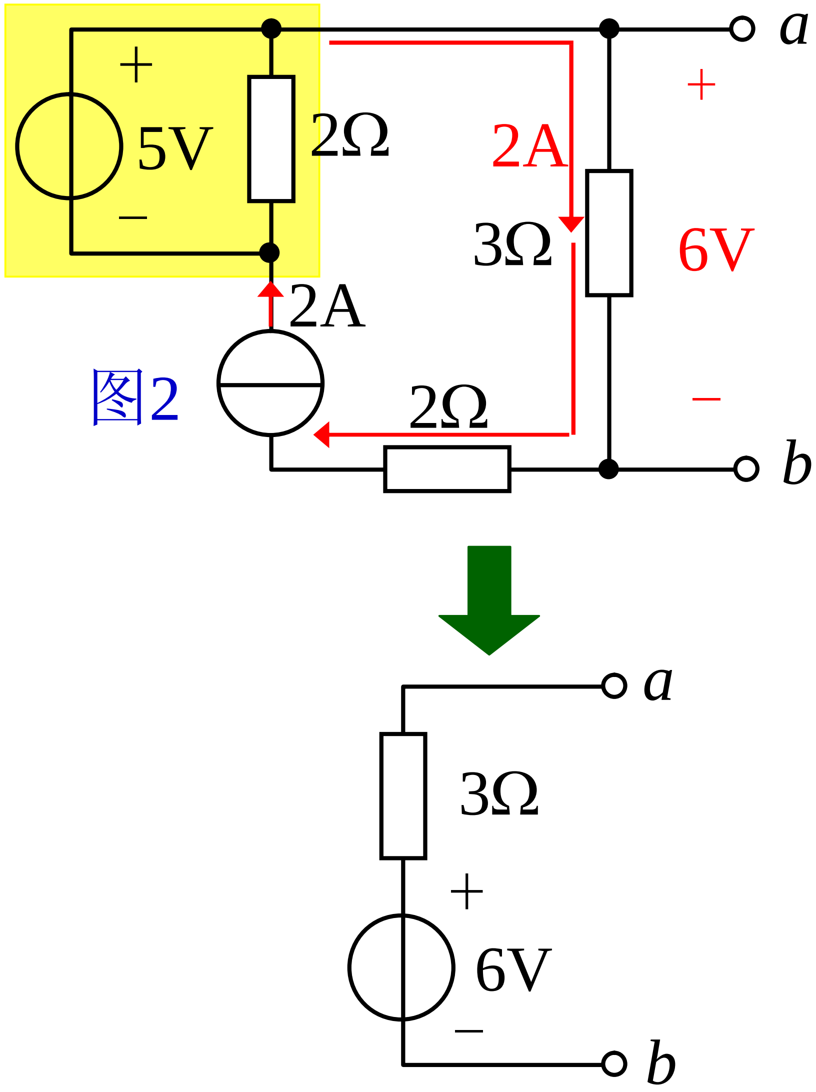
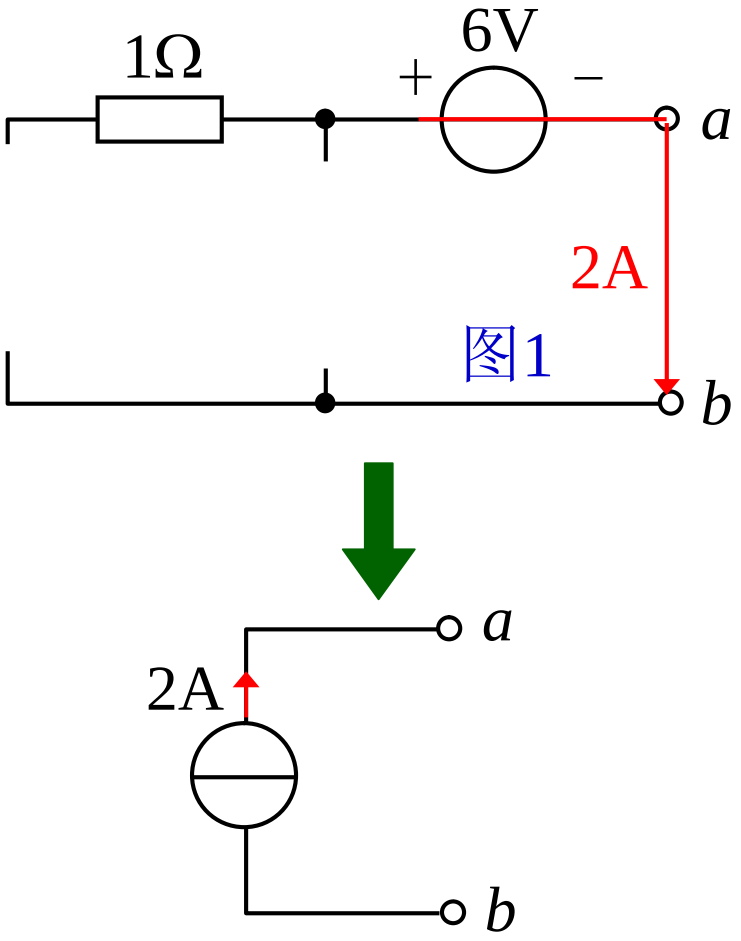
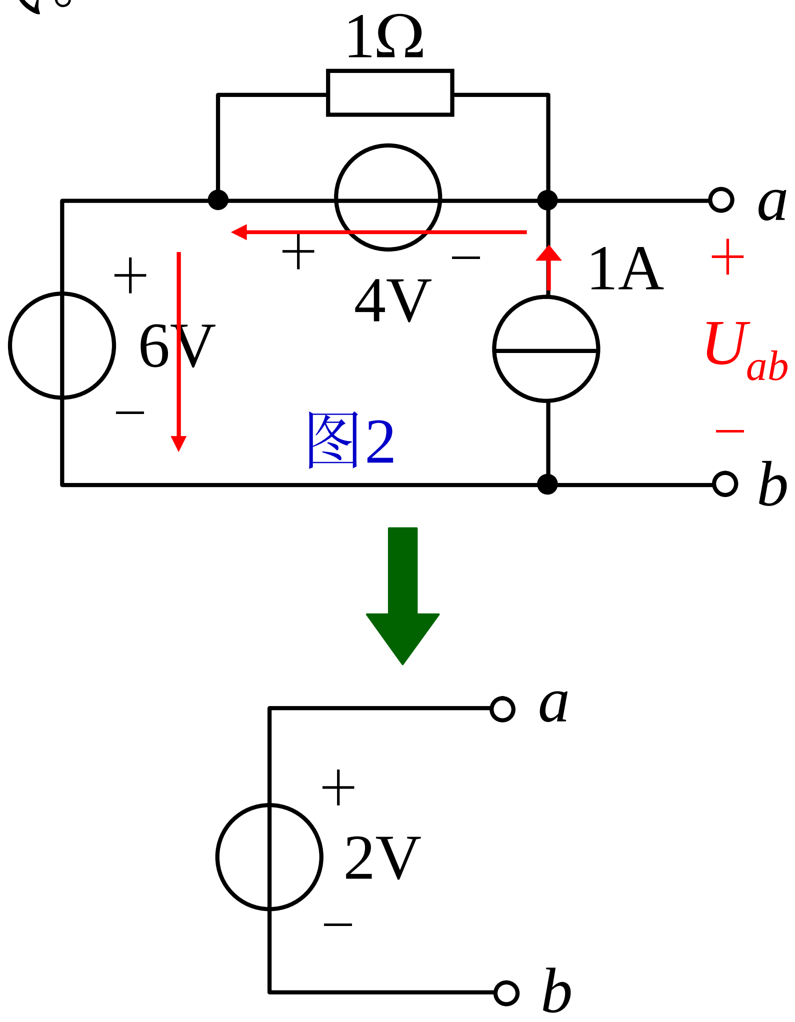


图2

3.将下图用一个等效电源替代。





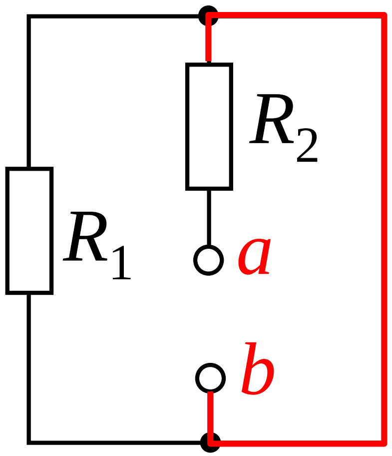
本章结束

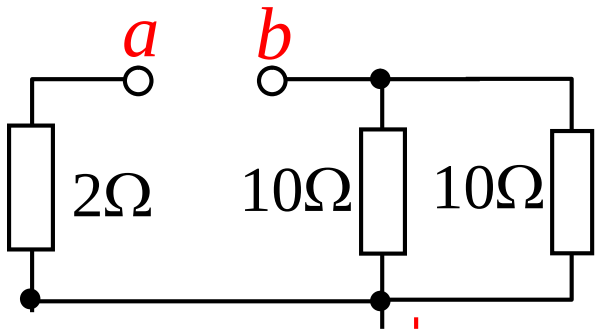
解题指导习题2–4 之图(e)

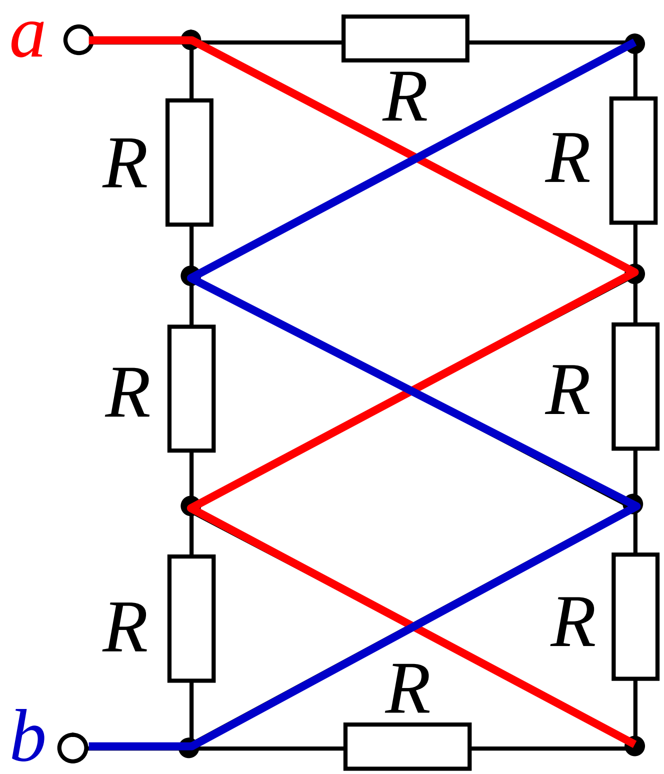
解题指导习题2–4 之图(g)

解题指导 习题2－10

解题指导　　求下列电路的入端电阻R_{ab}





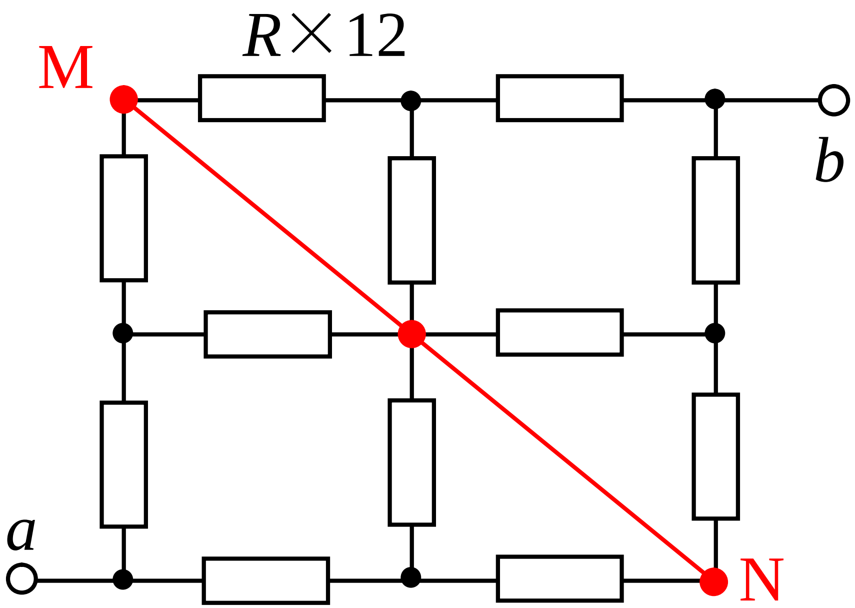


- 分析要点：想象在端口处加电压，从端口看进去，若两元件上的电压相等为“并”，电流相等为“串”，顺藤摸瓜，跟踪追击。

不要被一些短路线所迷惑。

返回

习题2–4 之图(e) 求等效电阻R_{ab}(所有R=2Ω)。



一样的网络，端口在平衡对称面两侧。

MN是相交线。 特点：网络中与平衡对称面的交点为等电位点。可以短接。所以

对ab端口而言，此网络属平衡对称网络。

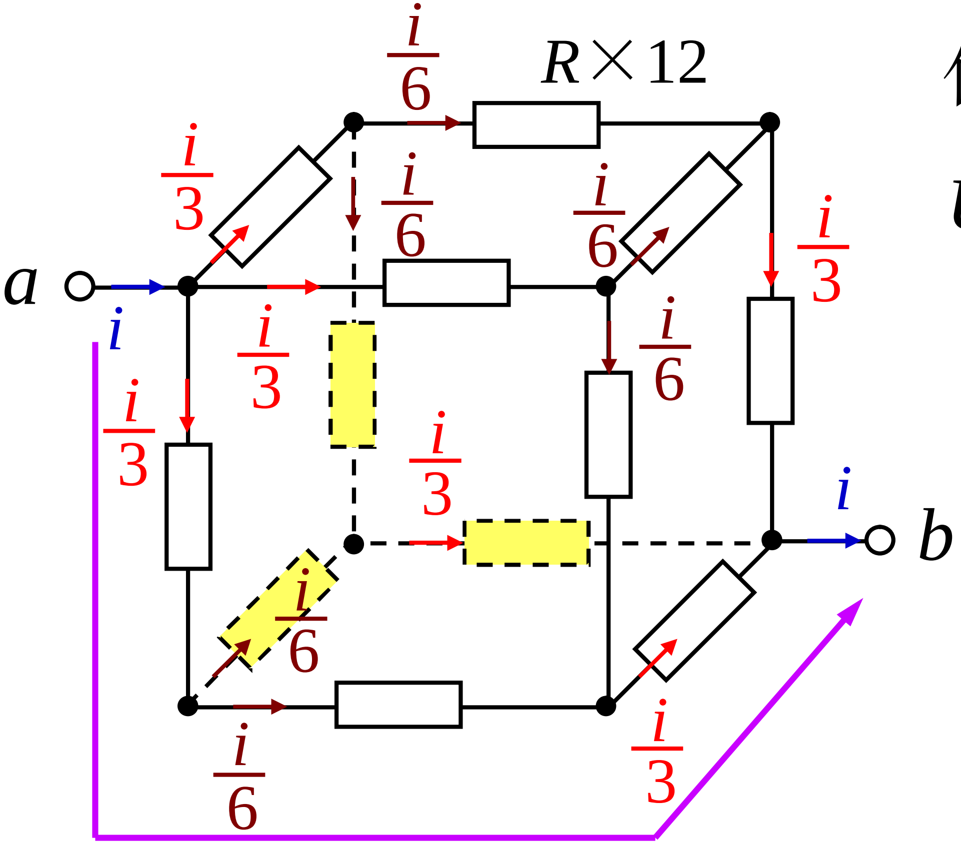
即该网络可由垂直于端口的平衡对称面平分为两半完全对称

$$\frac{R_{ab}}{2} = \left(\frac{R}{2}+R\right) // \left(\frac{R}{2}+R\right)$$

$$R_{ab} = \left(\frac{R}{2}+R\right) = \frac{3}{2}R$$

$$R = 2\Omega \rightarrow R_{ab} = 3\Omega$$

习题2–4 之图(g) 求等效电阻R_{ab}(所有R=2Ω)。



任选一路径，由KVL得

$$U_{ab}=\frac{i}{3}R+\frac{i}{6}R+\frac{i}{3}R$$

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i}$$

$$=\frac{1}{3}R+\frac{1}{6}R+\frac{1}{3}R$$

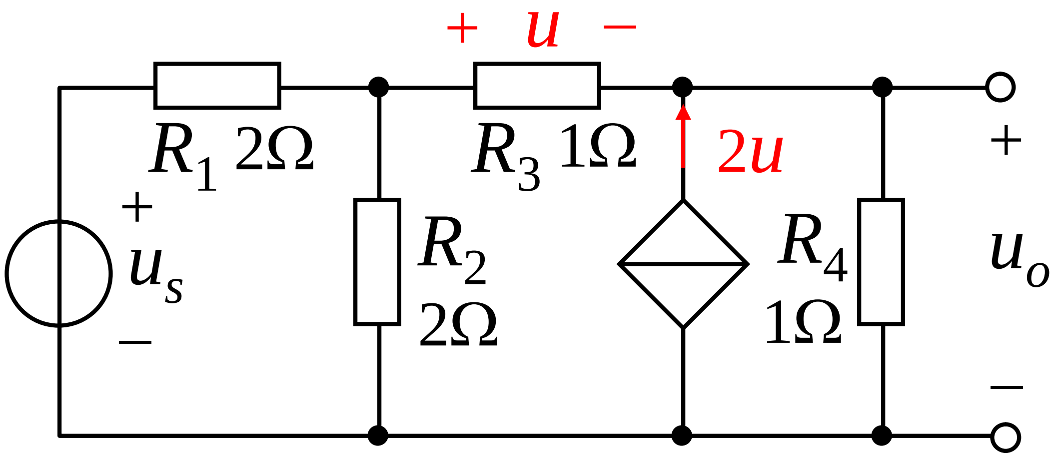
$$=\frac{5}{6}R$$

R=2Ω

$R_{ab}\approx 1.667\Omega$

根据电路结构的对称情况决定网络中一些支路的电流分布系数(电流分布系数法)。

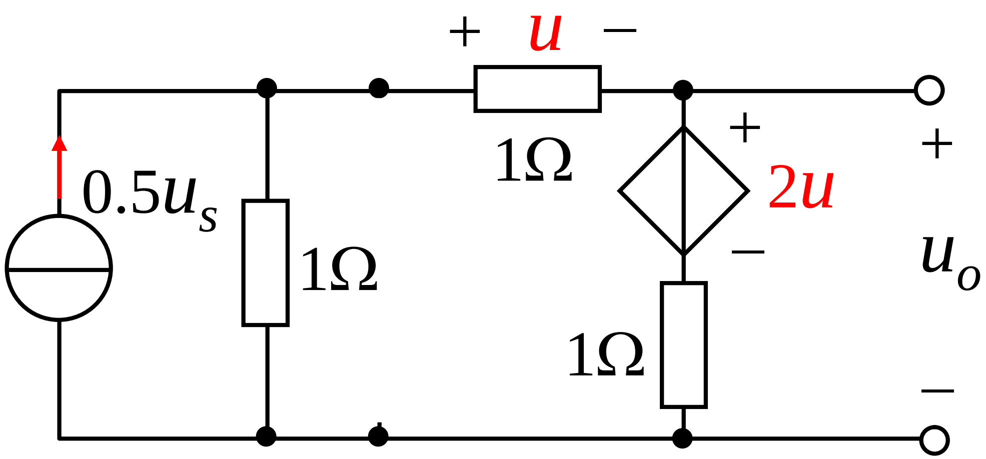
习题2－12

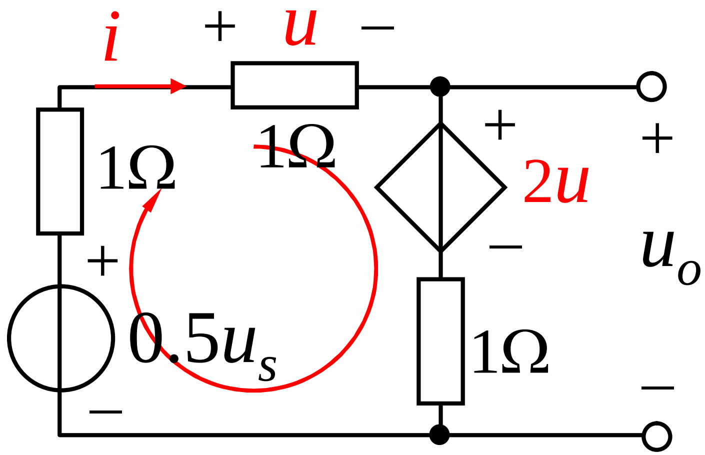


$u=1\times i=i$

$3u+2u=0.5u_s$

$u=0.1u_s$





$u_o= 2u+u=3\times 0.1u_s$

$u_o/u_s= 0.3$