第三章 电阻电路的一般分析

内容提要

1. 电路图论的初步知识
2. 线性电阻电路方程的建立方法
   ①支路电流法
   ②网孔电流法
   ③回路电流法
   ④结点电压法

利用等效变换逐步化简的方法对电阻电路进行分析，要改变电路的结构，适用于一定结构形式的电路。

- 本章将要介绍的一些普遍方法，一般不要求改变电路的结构。
- 分析步骤是

①选一组合适的电路变量(电流和/或电压)；

②根据KCL和KVL以及VCR建立该组变量的独立方程组；

③解方程求电路变量。

- 对线性电阻电路，电路方程是一组线性代数方程。变量较少时可以手工计算，变量较多时可以利用计算机作为辅助手段来分析。

§3-1 电路的图

现在介绍有关“图论”的初步知识，目的是研究电路的连接性质，并讨论电路方程的独立性问题。

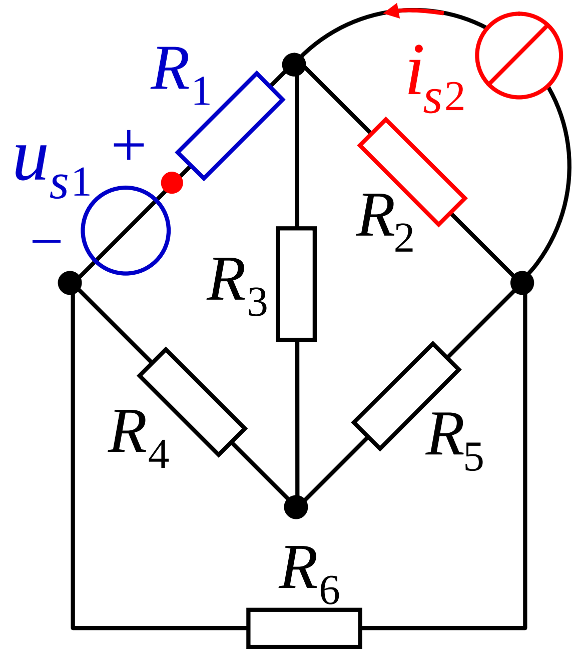
- 因为KCL和KVL与元件的性质无关，
- 所以讨论电路方程的独立性问题时，可以用一个简单的线段来表示电路元件。

➢ 用线段代替元件，称支路。

➢ 线段的端点称结点 。

➢ 这样得到的几何结构图称为图形，或“图(Graph)”。

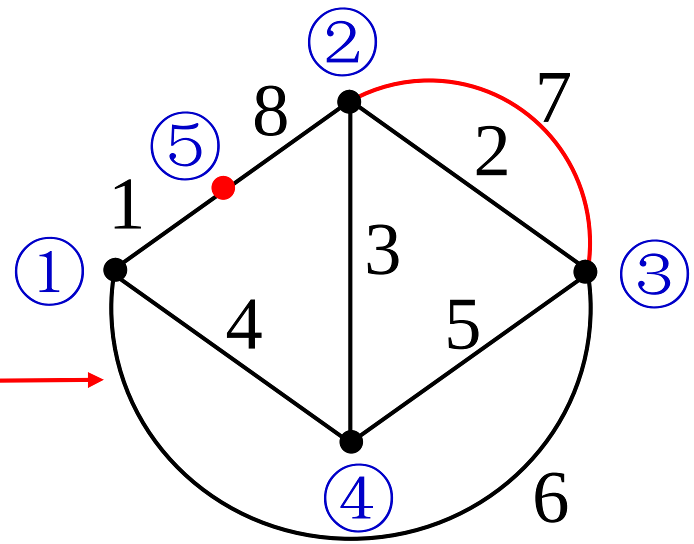
图G是一组结点和支路的集合，支路只在结点处相交。



5个结点和8条支路。

支路只是抽象的线段，

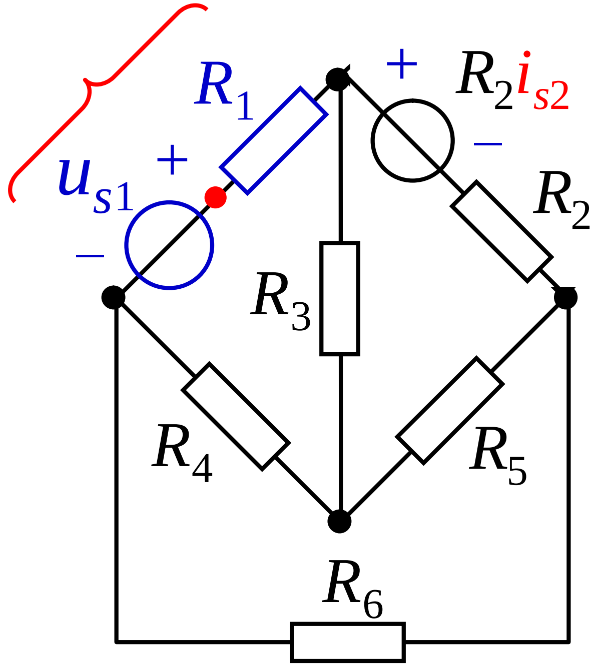
画成直线或曲线都行。

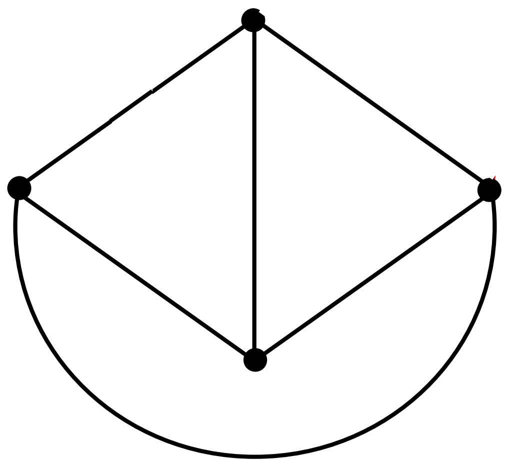


电压源和电阻的串联组合可以作为一条支路来处理。

- 电流源和电阻的并联组合也可以作为一条支路来处理。
- 可见，当用不同的元件结构定义电路的一条支路时，该电路以及它的图的结点数和支路数将随之而不同。

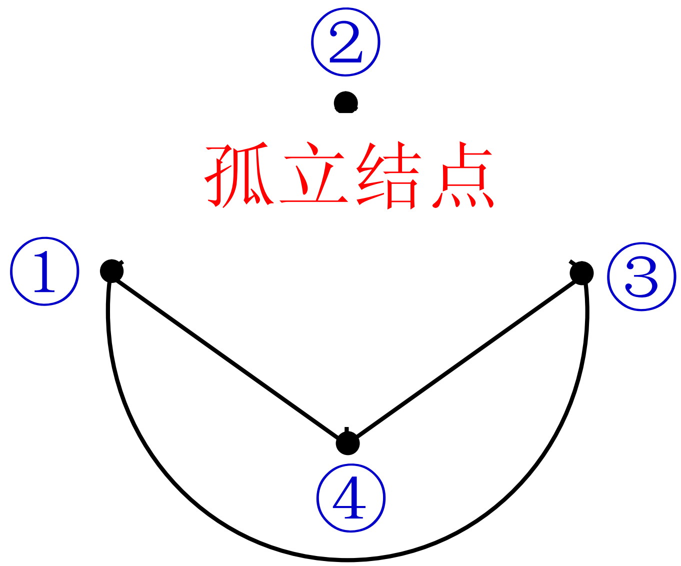
现在它有4个结点和6条支路。

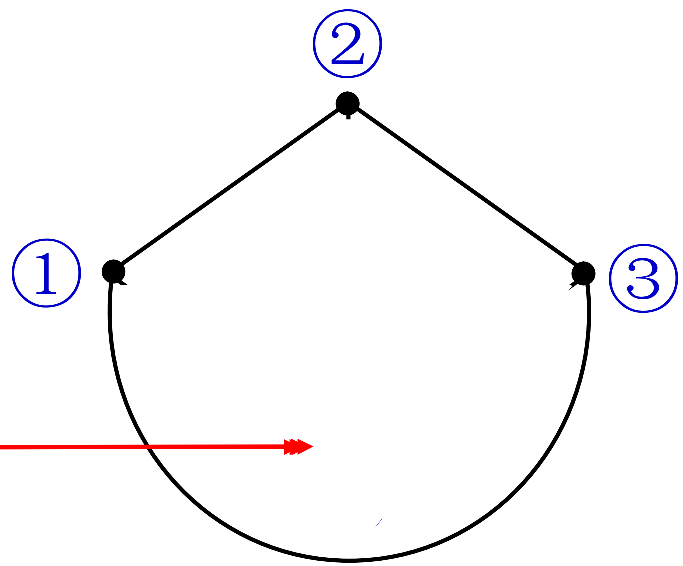




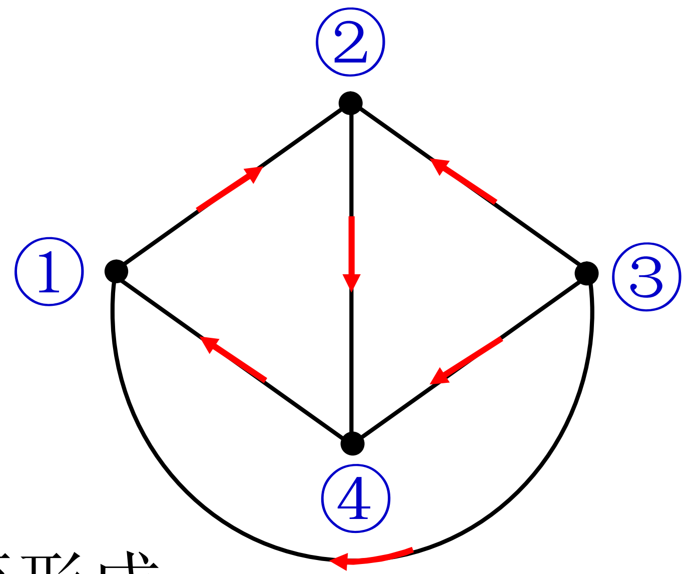
在图的定义中，结点和支路各自是一个整体，但任一条支路的起点和终端都必须在结点上。

- 有时会谈到把一条支路移去，但这不意味着同时把它所连接的结点也移去，因此允许有孤立的结点存在；
- 如果把一个结点移去，则应当把它连接的全部支路同时移去。





可见，图论中关于支路和结点的概念与电路中由具体元件构成的支路以及结点有些差别：



在电路中 { 支路是实体
结点由支路汇集而形成。

- 若对图的每一条支路也指定一个方向，此方向即该支路电流(和电压)的参考方向。
- 支路均赋以方向的图，称为有向图。
- 支路未赋以方向的图，称为无向图。

本章的重点和难点

重点

用观察法，熟练应用支路电流法，回路电流法，结点电压法的“方程通式”写出支路电流方程，回路电流方程，结点电压方程，并求解。

难点

1. 独立回路的确定
2. 正确理解每一种方法的依据
3. 含独立电流源和受控电流源的电路的回路电流方程的列写
4. 含独立电压源和受控电压源的电路的结点电压方程的列写

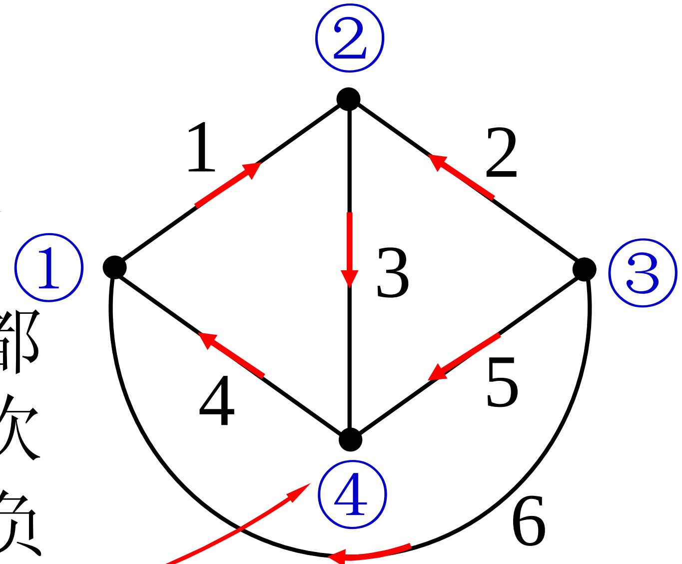
§3-2 KCL和KVL的独立方程数

一、KCL的独立方程数

- 对各结点列LVL方程：

$$\left.\begin{aligned}
&① \quad \cancel{i_1} - \underline{\underline{i_4}} - \cancel{i_6} = 0 \\
&② \quad -\cancel{i_1} - \cancel{i_2} + \underline{\underline{i_3}} = 0 \\
&③ \quad \cancel{i_2} + \underline{\underline{i_5}} + \cancel{i_6} = 0 \\
&④ \quad -i_3 + i_4 - i_5 = 0
\end{aligned}\right\}$$

各电流都出现两次一正一负



- 4个方程相加结果为0，不是相互独立的。

把任意3个方程相加起来，必得另一个方程。

相差一个符号，原因是各电流在结点① ② ③若是流入(出)，则在结点④就是流出(入) 。

上述4个方程中，任意3个是独立的。

- 对具有n个结点的电路，独立的KCL方程为任意的$(n-1)$个 。

与独立方程对应的结点叫做独立结点。

二、 KVL的独立方程数

- 与KVL的独立方程对应的回路称独立回路。

因此，要列出KVL的独立方程组，首先要找出与之对应的独立回路组。

- 有时，寻找独立回路组不是一件容易的事。利用“树”的概念会有助于寻找一个图的独立回路组。

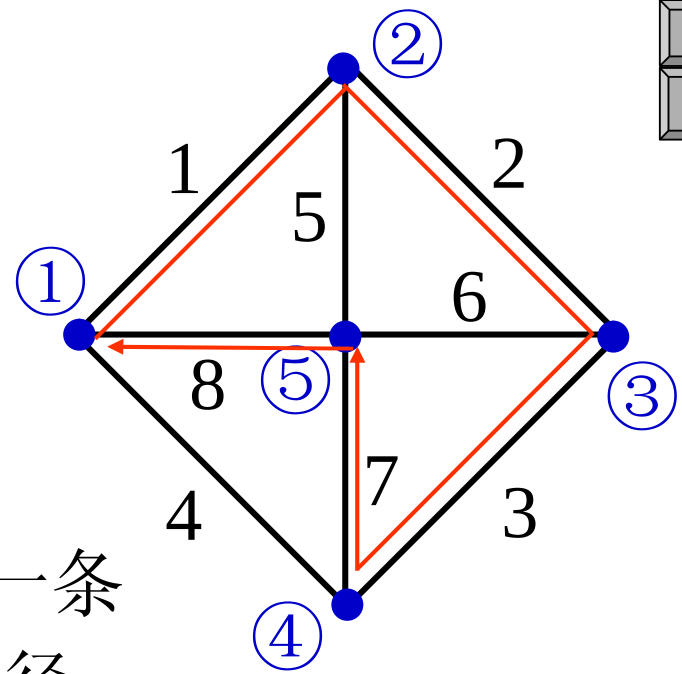
回路和独立回路的概念与支路的方向无关，现用无向图介绍如下：

1. 连通图

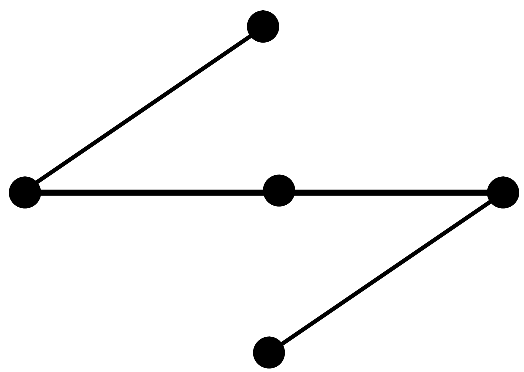
从图的某一结点出发，沿着一些支路连续移动，从而到达另一指定的节点

(或回到原出发点)，

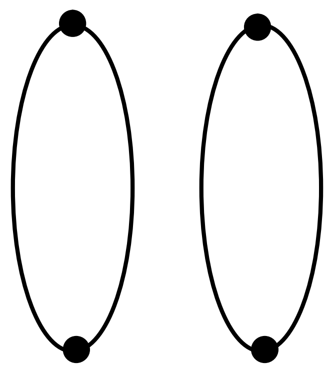
这样的一系列支路构成了图G的一条<u>路径</u>。一条支路本身也是一条路径。



- 当图G的任意两个结点之间至少存在一条路径时，G就称为连通图。



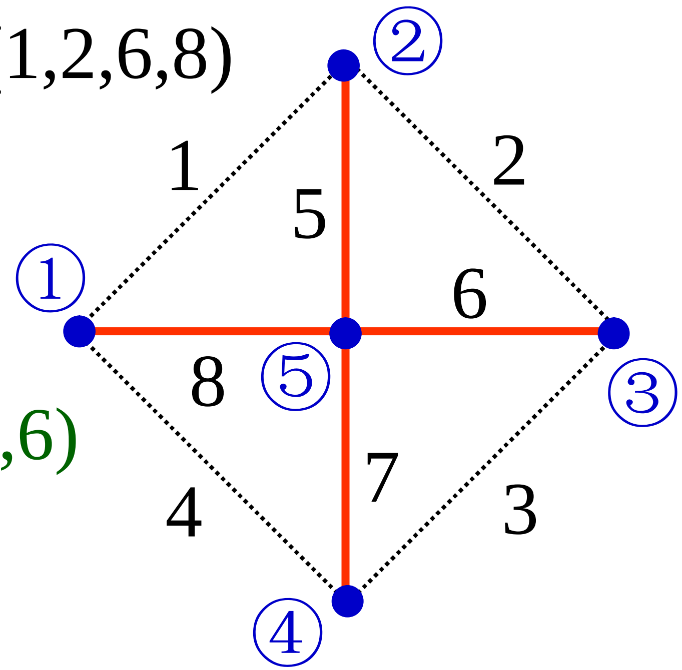
连通图



非连通图

若一条路径的起点和终点重合，且经过的其它结点都相异，则这条闭合路径就构成了图G的一个回路。

(1,2,6,8)



(1,5,8)，(2,5,6)，(1,2,3,4)，(3,4,8,6)

- 共有13个不同的回路，但独立回路数远小于13个。

由任意2个可得第3个。

2. 树 (Tree)的定义

一个连通图G的树T，

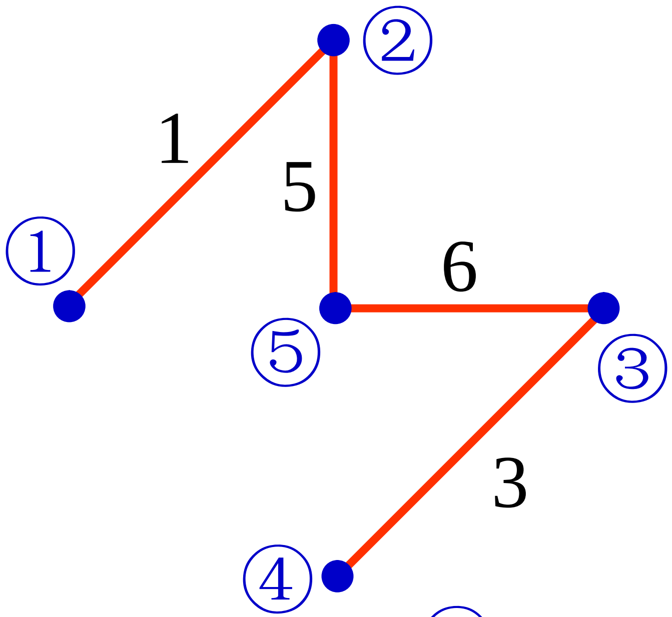
①包含G的全部结点；

②本身是连通的；

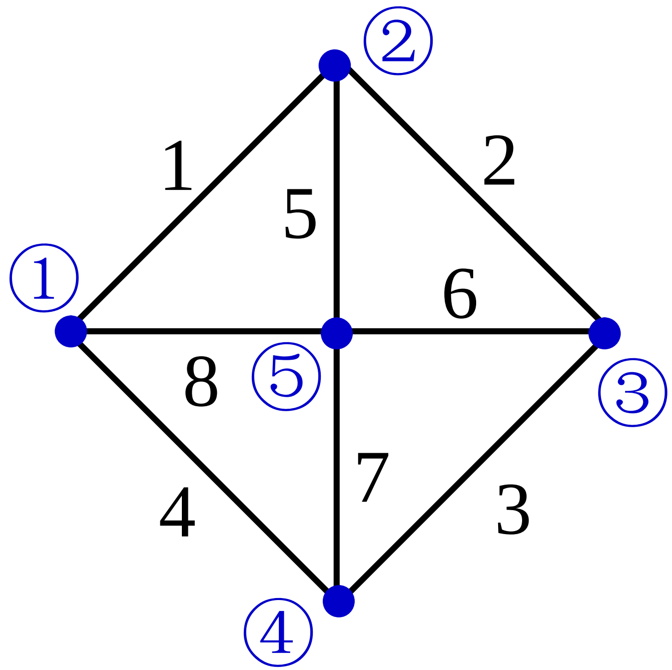
③不包含回路。

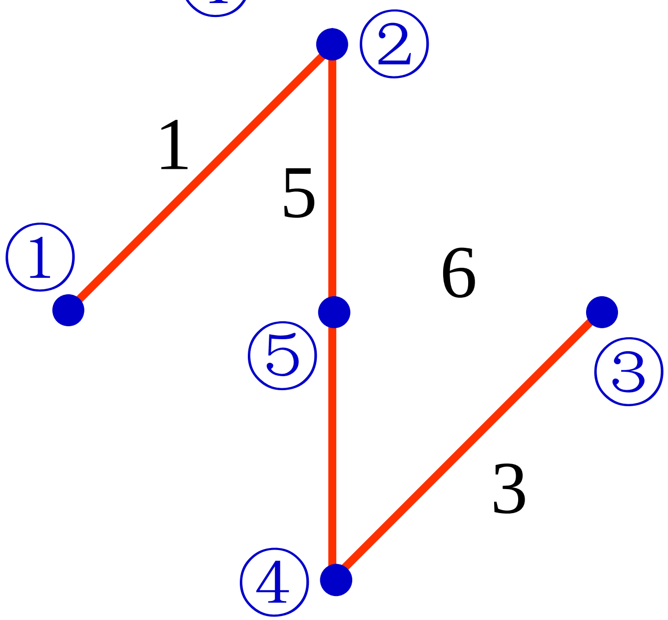
构成树的各支路叫树支，如5,6,7,8。

其余支路叫连支，如1,2,3,4。



符合定义
的 T很多



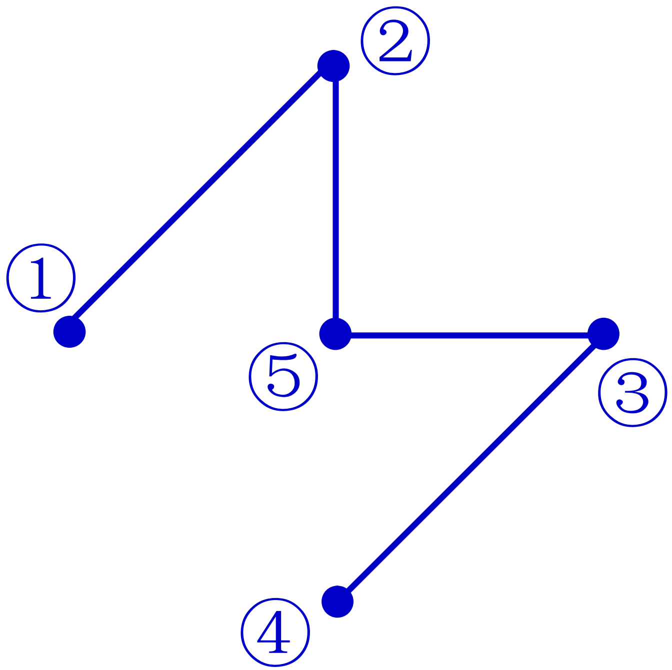


- 图G有5个结点，不管哪一个树T，树支数总是4。
- 任一个具有n个结点的连通图，它的任何一个树的树支数为$(n-1)$。

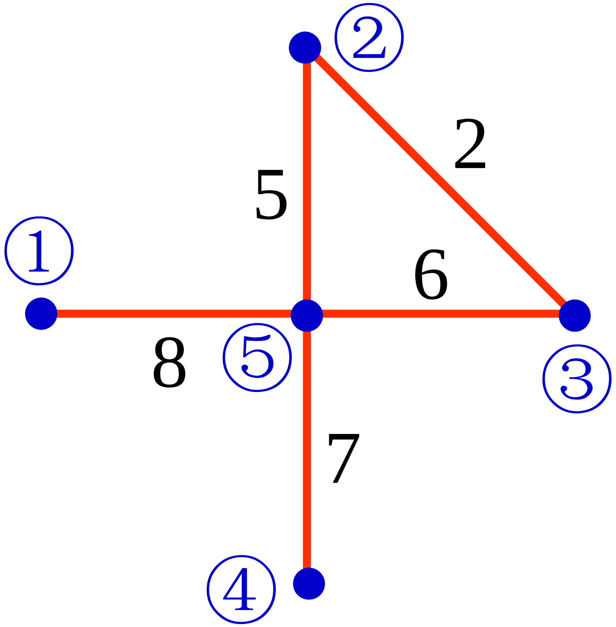
说明

设想把G的全部支路移去，只剩下它的n (=5)个节点。

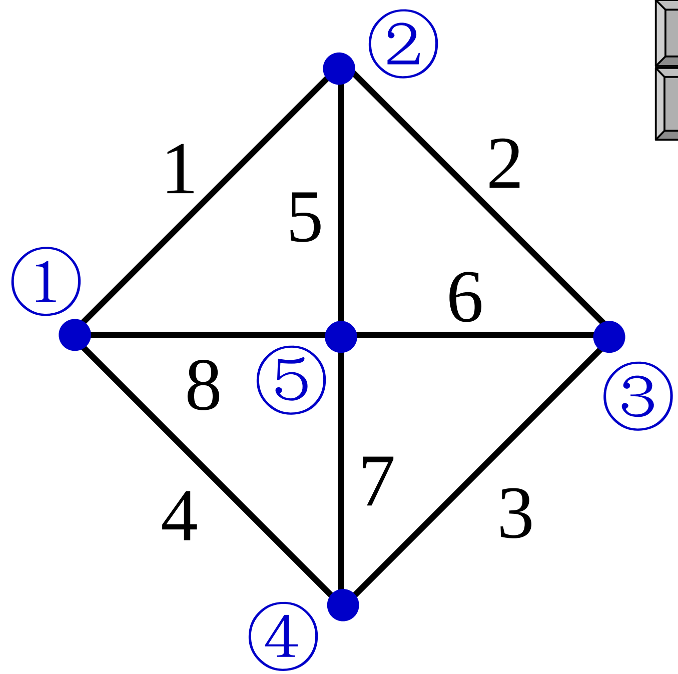
- 为了构成G的一个树，先用1条支路把2个结点连起来。
- 之后，每连接一个新结点，只需一条支路，(也只能用一条支路，否则将形成回路)。

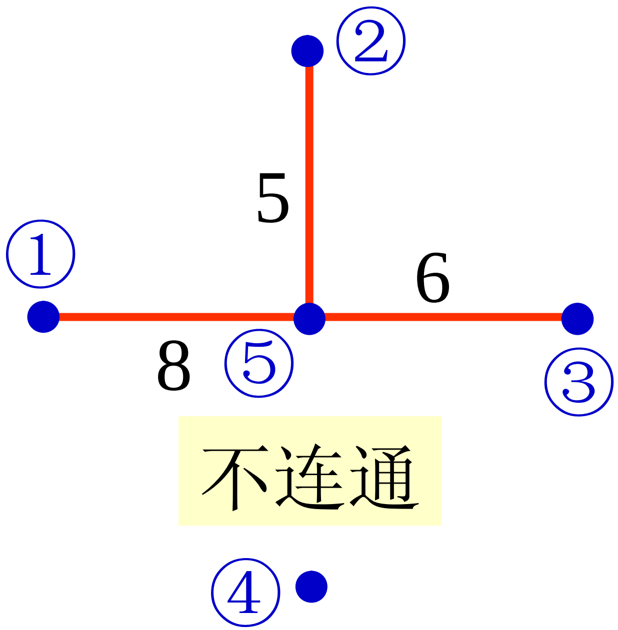


因为第一条支路连接了两个结点，所以把n (=5) 个节点全部连接起来所需要的支路数恰好是($n-1=4$)。



含回路





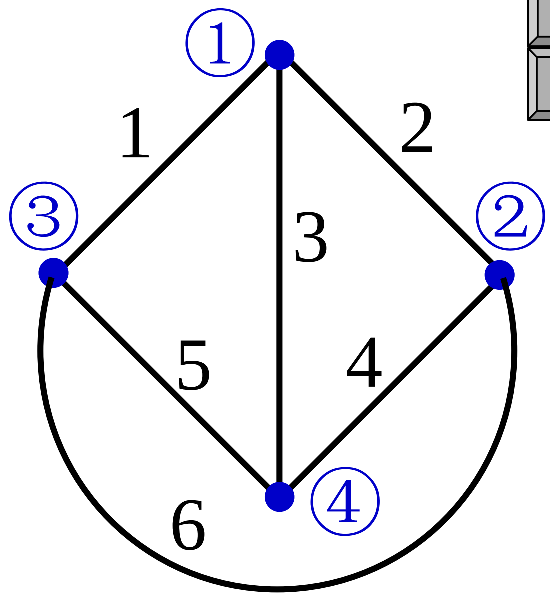
3. 基本回路

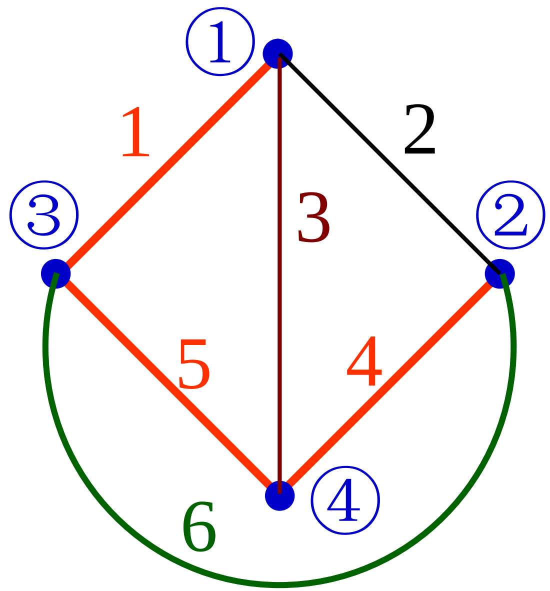
- 连通图的一个树包含全部结点又不形成回路。

  可见对任意一个树，加入一个连支便形成一个回路。

➢ 这种仅含一个连支(其余为树支)的回路称为单连支回路或基本回路。

➢ 由全部连支形成的单连支回路构成基本回路组。





- 因为每个基本回路包含了一条其他回路所没有的支路，所以基本回路组是独立回路组。

➢ 独立回路数等于连支数。

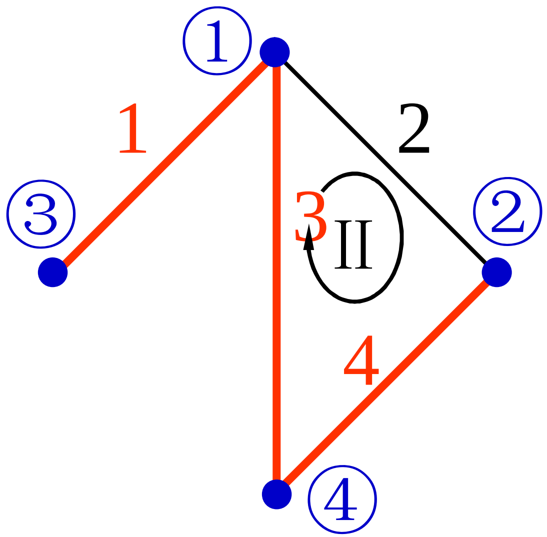
- 若一个连通图G有n个结点，b条支路，

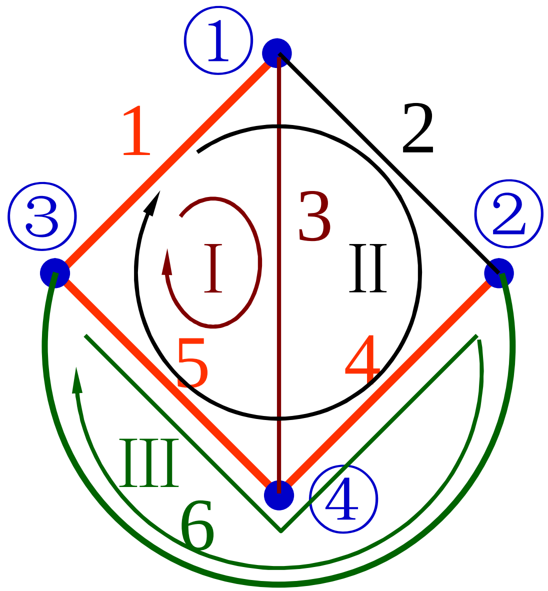
  G的任一个树的树支数为$(n-1)$，

  连支数为$b-(n-1)$，

- 则独立回路数 $l = b-(n-1)$ 。

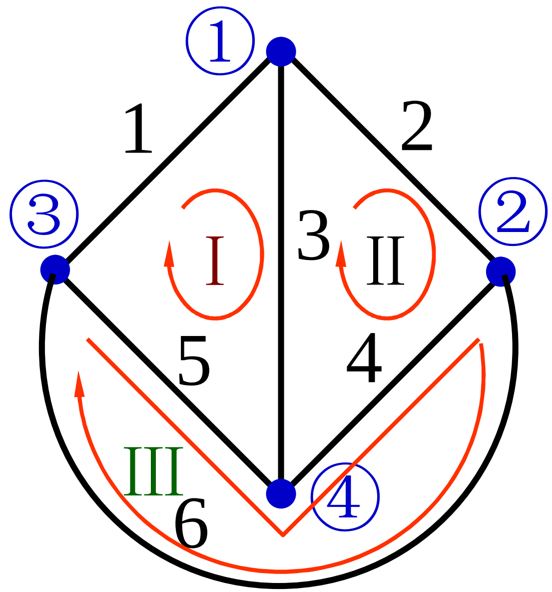
选择不同的树，获得的基本回路组也不同。

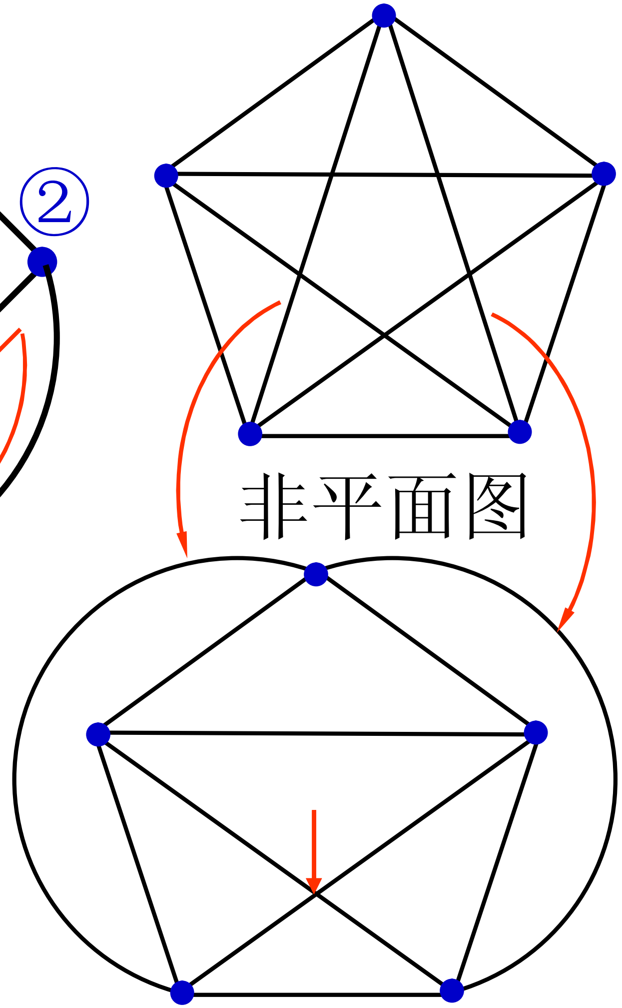




若把一个图画在平面上，能使它的各条支路除所连接的结点外不再交叉，则这样的图称为平面图。

- 平面图的全部网孔就是一组独立回路。
- 其数目恰好是该图的独立回路数 $l = b-(n-1)$





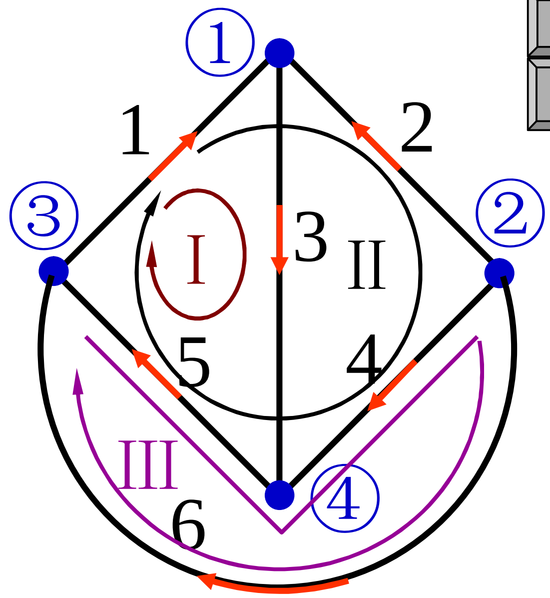
➢ 一个电路的KVL的独立方程数等于它的独立回路数。

KVL的独立方程组

回路 I： $u_1+u_3+u_5=0$

回路 II： $u_1-u_2+u_4+u_5=0$

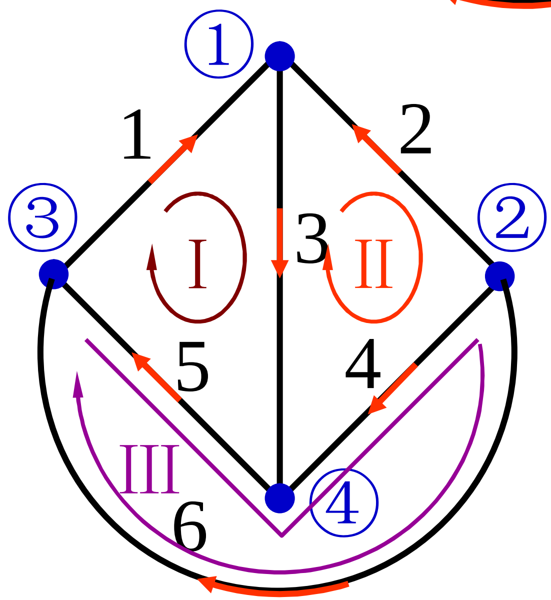
回路III： $-u_4-u_5+u_6=0$



若按网孔，则回路 I 、III的方程不变，

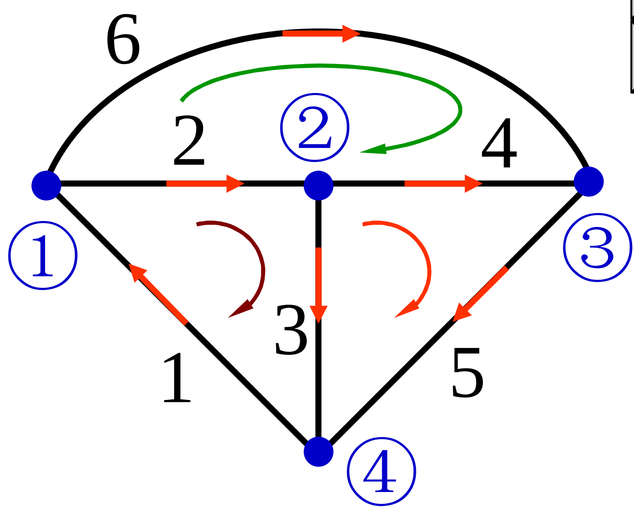
回路 II 的方程修改为：

$-u_2-u_3+u_4=0$



§ 3-3 支路电流法

- 以支路电压和支路电流作为电路变量来列电路方程是一种直接的求解方法。
- 在一般情况下，若电路有n个节点和b条支路:

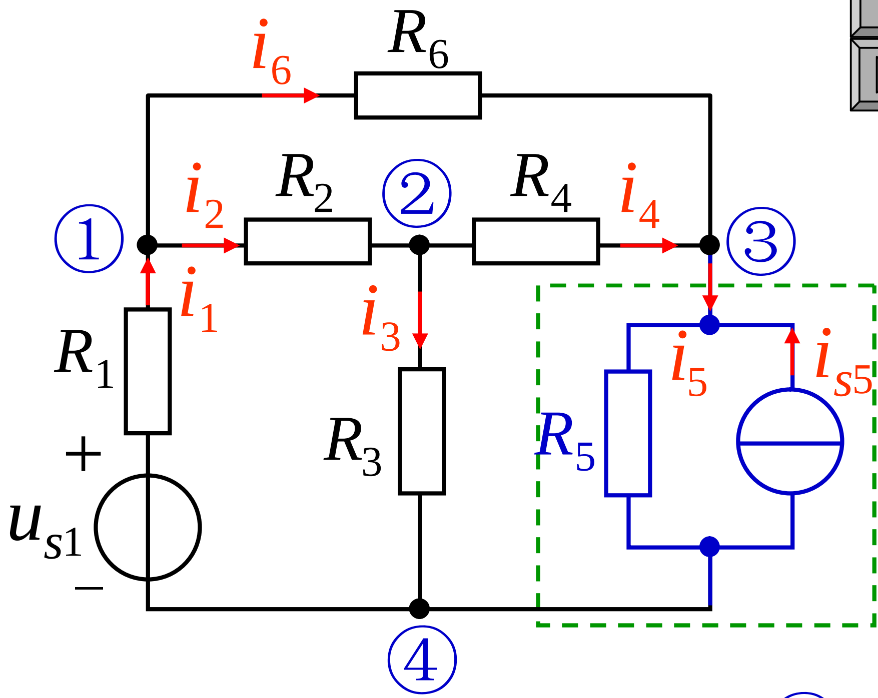


$$\left.\begin{array}{l}\text{KCL:}(n-1)\\ \text{KVL: }(b-n+1)\end{array}\right\}\ b\text{个方程}$$

VCR: b个支路方程

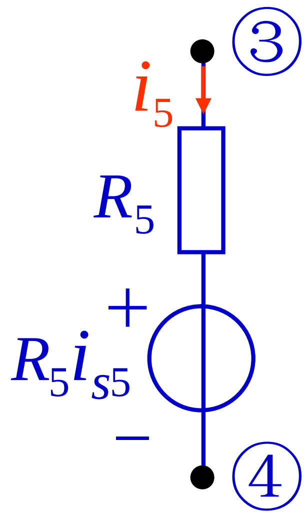
- 总共可以列出2b个方程。
- 解2b个方程得2b个未知量的求解方法称为2b法。

支路电流法：以支路电流为电路变量，的求解方法。



- 采用支路电流法分析电路时，所需的联立方程数比2b法减少到b。

支路电流法的实质：
将VAR直接代入KCL和KVL，进行求解。



1. 支路电流法分析步骤

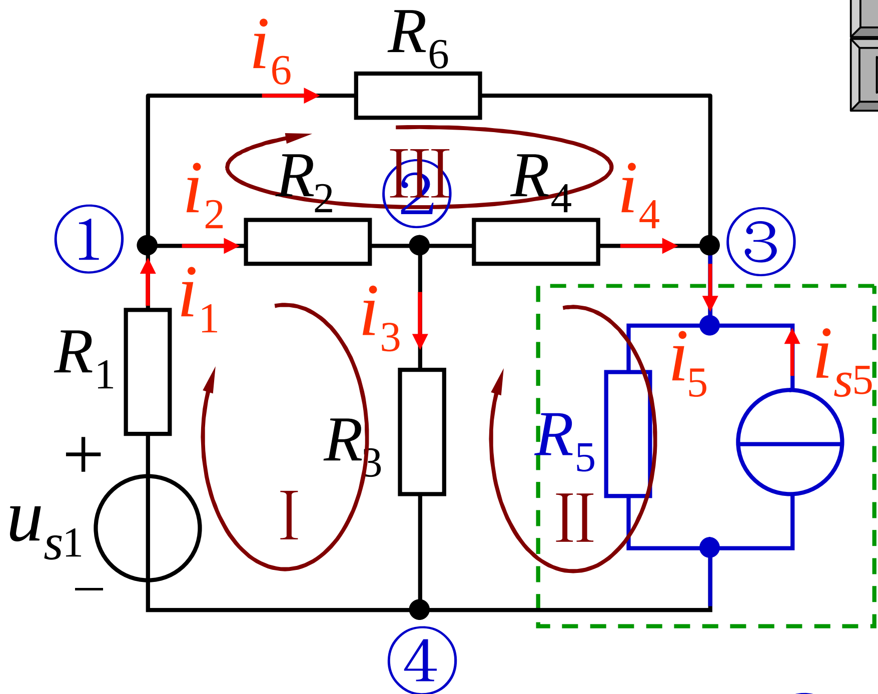
(1)选定各支路电流的参考方向；

(2)根据KCL列$(n-1)$个独立结点方程；

①：$-i_1+i_2+i_6=0$

②：$-i_2+i_3+i_4=0$

③：$-i_4+i_5-i_6=0$

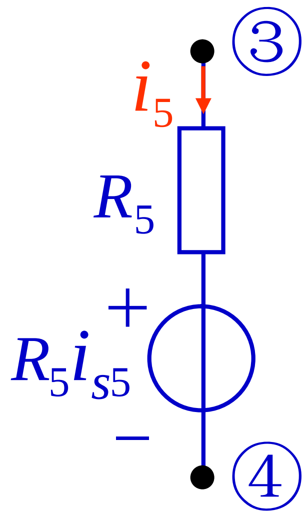


(3)选取$(b-n+1)$个独立回路，指定回路的绕行方向；应用KVL列出回路方程。

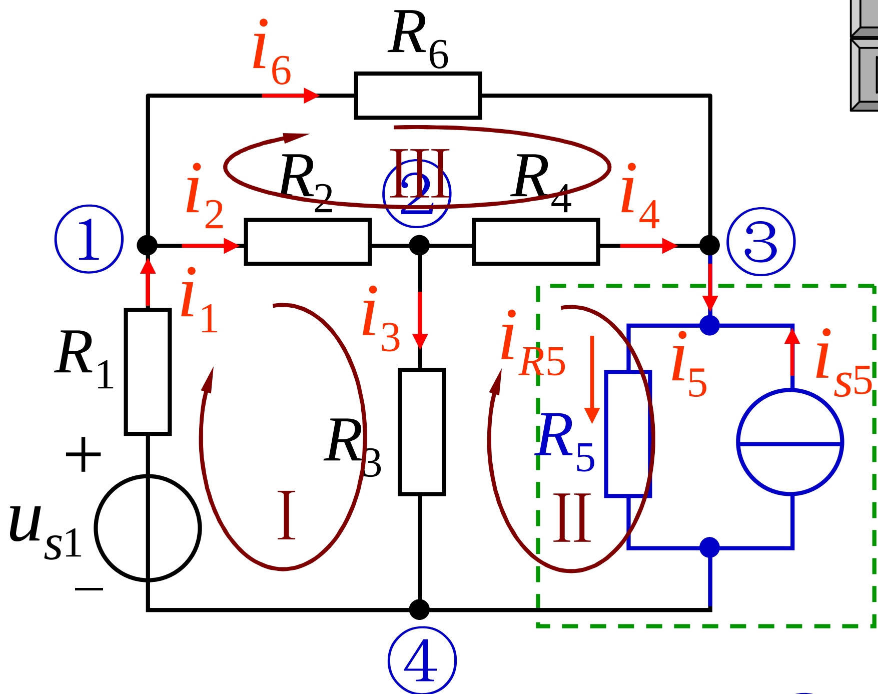
Ⅰ：$R_1i_1+R_2i_2+R_3i_3=u_{s1}$

Ⅱ：$-R_3i_3+R_4i_4+R_5i_5=-R_5i_{s5}$

Ⅲ：$-R_2i_2-R_4i_4+R_6i_6=0$

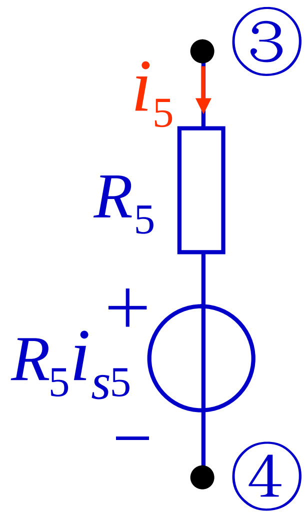


$$-i_1+i_2+i_6=0$$
$$-i_2+i_3+i_4=0$$
$$-i_4+i_5-i_6=0$$
$$R_1i_1+R_2i_2+R_3i_3=u_{s1}$$
$$-R_3i_3+R_4i_4+R_5i_5=-R_5i_{s5}$$
$$-R_2i_2-R_4i_4+R_6i_6=0$$



(4)解方程可求得$i_1\sim i_6$。

求出支路电流，可以进一步计算任意两结点之间的电压、元件功率等。



如结点①、④之间的电压： $u_{14}=u_{s1}-R_1i_1$

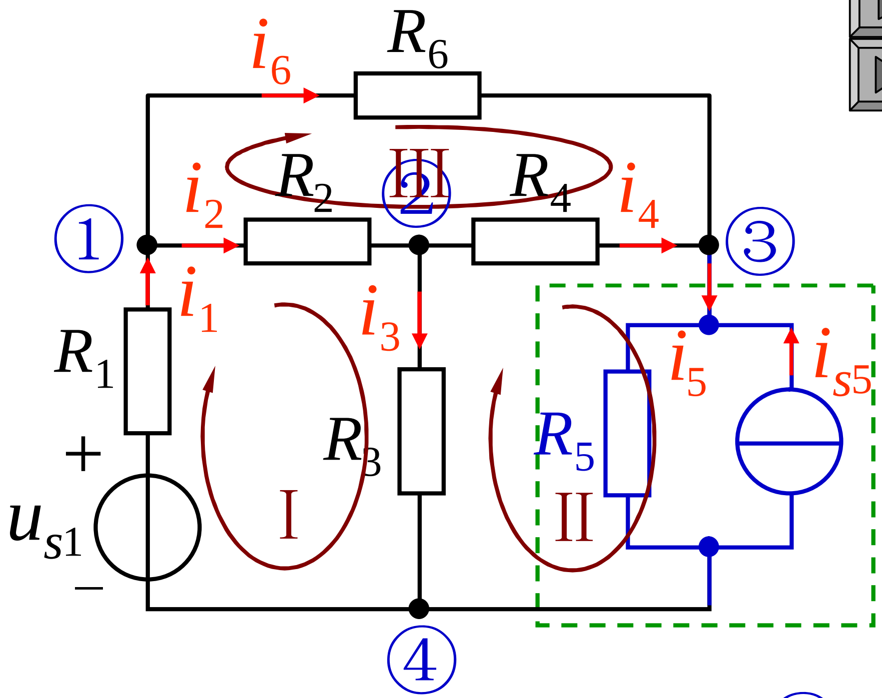
要求R_5的电流，应在原电路进行：

$$i_{R5}=i_{s5}+i_5$$

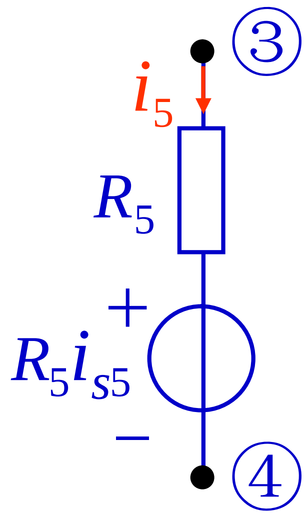
列KVL方程时注意正负号

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = u_{s1}$$
$$-R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 = -R_5 i_{s5}$$
$$-R_2 i_2 - R_4 i_4 + R_6 i_6 = 0$$

$$\sum R_k i_k = \sum u_{sk}$$

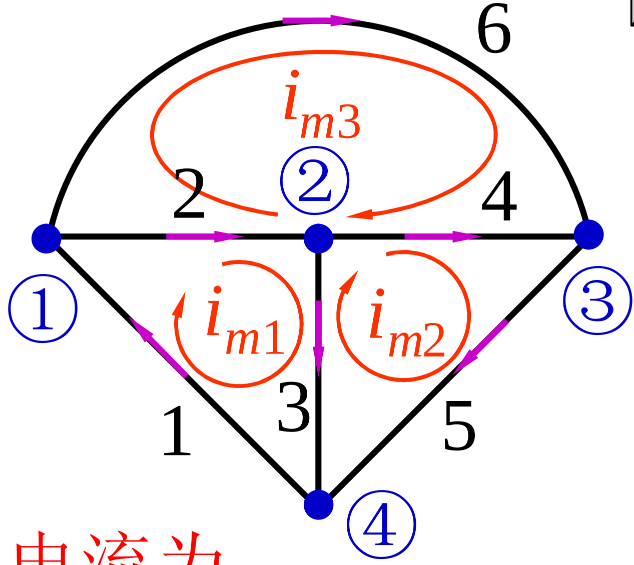


- i_k的参考方向与绕行方向一致，$R_k i_k$ 项前取正号，否则取负号；
- 绕行方向从u_{sk}的正极穿出，u_{sk}前取正号，否则取负号。



§3-4 网孔电流法

- 支路电流法可以求解任何复杂的电路，但在支路数较多的情况下，联立方程式也多，使求解过程冗长，出错的可能性增大。

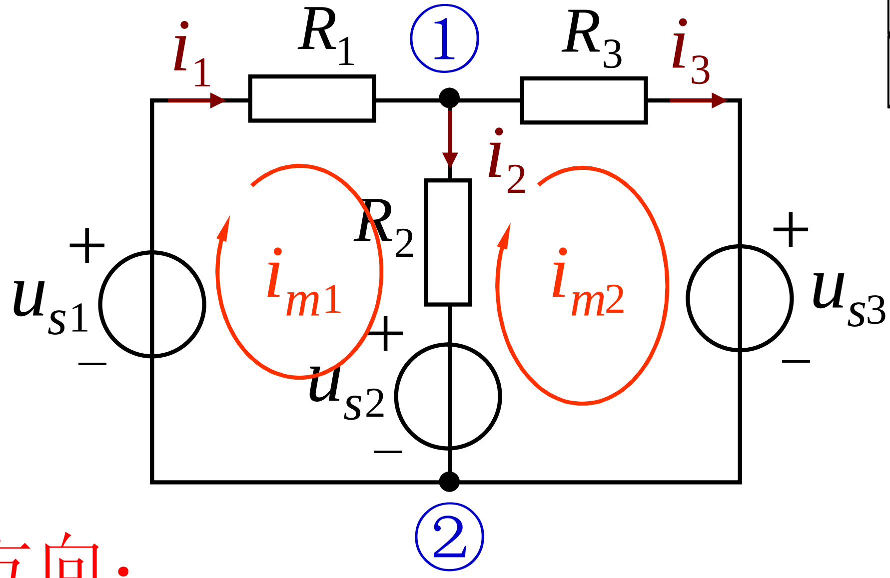


- 网孔电流法：以假想存在的网孔电流为变量列写KVL方程并求解。然后再利用KCL，由网孔电流求各支路电流。

一个平面电路有$b-n+1$个网孔，因而网孔电流也有$b-n+1$个，使方程数减少了$(n-1)$个 。

因平面图的全部网孔就是一组独立回路。

所以网孔法只需按KVL列电路方程。



1. 分析步骤：

(1)标出网孔电流的参考方向；

(2)以各自的网孔电流方向为绕行方向，列KVL方程；

注意：i_{m1}和i_{m2}都流过R_2！

孔1：$R_1 i_{m1}+R_2 i_{m1}-R_2 i_{m2}=u_{s1}-u_{s2}$

孔2：$-R_2 i_{m1}+R_2 i_{m2}+R_3 i_{m2}=u_{s2}-u_{s3}$

$R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}=u_{s11}$

$R_{21}i_{m1}+R_{22}\,i_{m2}=u_{s22}$

$R_{11}i_{m1}$代表i_{m1}在孔1内各电阻上产生的压降；

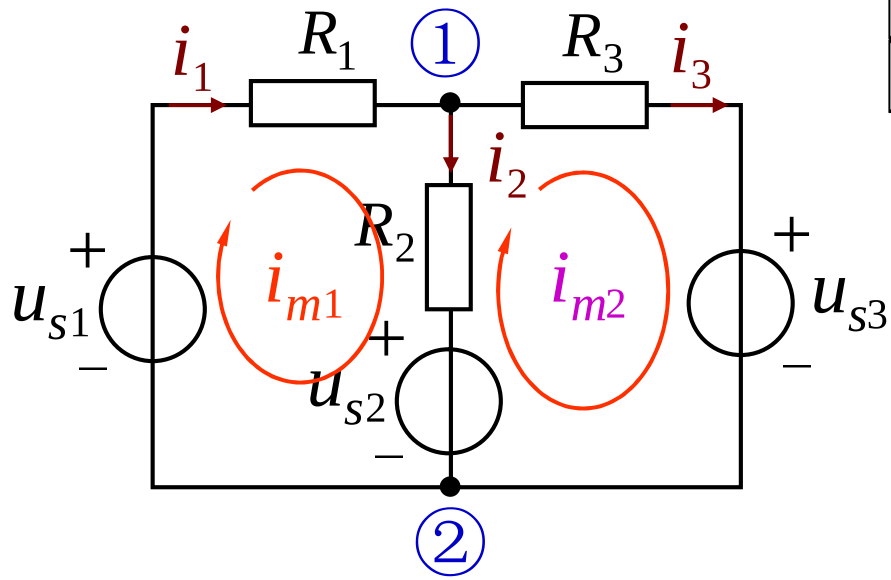
$R_{22}i_{m2}$代表i_{m2}在孔2内各电阻上的压降；

$R_{11}=R_1+R_2$

$R_{22}=R_2+R_2$

称为<u>自阻</u>。

由于绕行方向与网孔电流方向一致，所以<u>自阻总是正的</u>！



$R_1\,i_{m1}+R_2\,i_{m1}-R_2i_{m2}=u_{s1}-u_{s2}$

$-R_2\,i_{m1}+R_2\,i_{m2}+R_3\,i_{m2}=u_{s2}-u_{s3}$

$(R_1+R_2)\,i_{m1}-R_2i_{m2}=u_{s1}-u_{s2}$

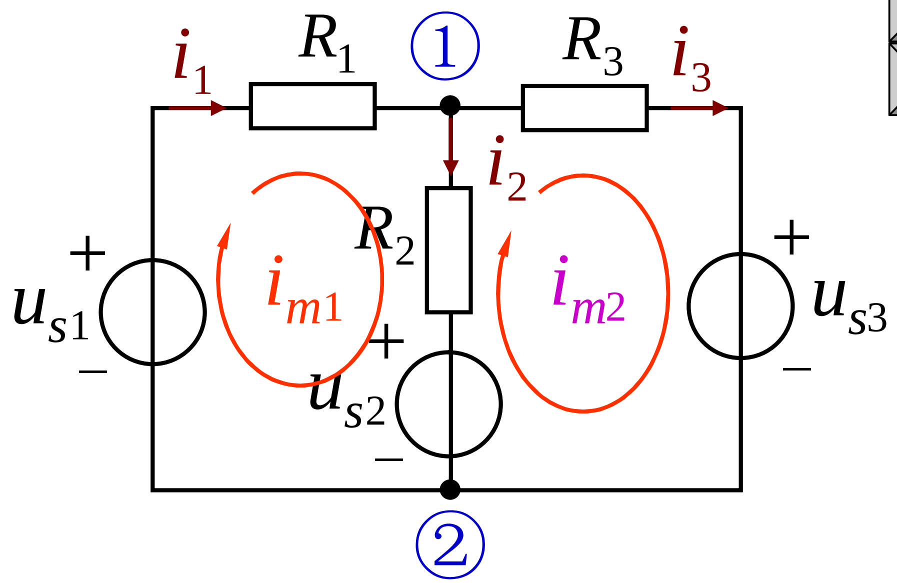
$-R_2\,i_{m1}+(R_2+R_3)\,i_{m2}=u_{s2}-u_{s3}$

$R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}=u_{s11}$

$R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}=u_{s22}$

$R_{12}i_{m2}$ 代表 i_{m2} 在孔1内产生的电阻压降；

$R_{21}i_{m1}$ 代表 i_{m1} 在孔2内产生的电阻压降。



R_{12}、R_{21}是两个网孔的共有电阻，称互阻。

i_{m2} (i_{m1}) 产生的电压与网孔1 (2)的绕行方向一致，互阻取正，反之取负。

本例 $R_{12}=R_{21}=-R_2$

$$(R_1+R_2)\,i_{m1}-R_2 i_{m2}=u_{s1}-u_{s2}$$

$$-R_2\,i_{m1}+(R_2+R_3)\,i_{m2}=u_{s2}-u_{s3}$$

各网孔总电压源的电压。

2. 推广到具有m个网孔的平面电路

$$
\begin{aligned}
&R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+R_{13}i_{m3}+\cdots+R_{1m}i_{mm}=u_{s11}\\
&R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+R_{23}i_{m3}+\cdots+R_{2m}i_{mm}=u_{s22}\\
&R_{31}i_{m1}+R_{32}i_{m2}+R_{33}i_{m3}+\cdots+R_{3m}i_{mm}=u_{s33}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&R_{m1}i_{m1}+R_{m2}i_{m2}+R_{m3}i_{m3}+\cdots+R_{mm}i_{mm}=u_{smm}
\end{aligned}
$$

- 相同下标的$R_{11}\sim R_{mm}$为自阻，总是正的。
- 不同下标的R_{12}、R_{1m}、R_{21}、R_{m1}等是网孔间的互阻。

(1)互阻的正负，应视网孔电流在共有支路上的参考方向而定：“同正反负”。

(2)若所有网孔电流都取顺（逆）时针方向，则互阻总是负的。

(3)若两个网孔之间没有共有支路，或有，但仅含电压源，则互阻为0。

(4)对不含受控源的电阻电路，总有$R_{ik}= R_{ki}$。

- u_{s11}～u_{smm}分别是网孔1～m的电压源代数和。网孔电流从各电压源正极流出时，前面取“+”，反之取“–”。

例3–1 (教材P60)　略。

上次课回顾

1. 树(T)

是连通图G的一个子图，且满足下列条件：

(1) 连通；

(2)包含图G中所有结点； 对应一个图有很多的树；

(3)不含闭合路径。 树支的数目是一定的：结点数减1。

2. 回路(L)

是连通图G的一个子图，构成一条闭合路径，并满足条件：

(1)连通；

(2)每个节点关联2条支路。

对应一个图有很多的回路；

基本回路的数目是一定的，为连支数；

3. KCL的独立方程数 $n-1$

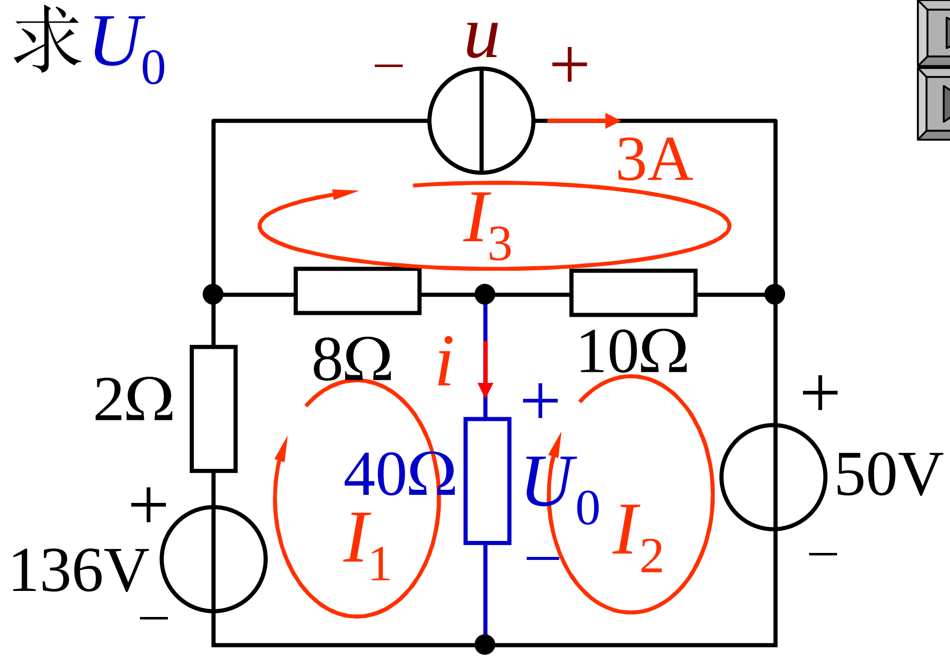
KVL的独立方程数 $b-(n-1)$

4. 支路电流法。

5. 网孔路电流法。

教材P76题3−11(图P77)，求U_0

解：选取网孔电流。



自阻：

R_{11}=50Ω

R_{22}=50Ω

R_{33} =18Ω

虚设电流源的电压u为变量

互阻：

R_{12}=R_{21}=−40Ω

R_{13}=R_{31}=−8Ω

R_{23}=R_{32}=−10Ω

$$\begin{cases} 50I_1 - 40I_2 - 8I_3 = 136 \\ -40I_1 + 50I_2 - 10I_3 = -50 \\ -8I_1 - 10I_2 + 18I_3 = u \end{cases}$$

附加方程：I_3=3A

解之：

I_1=8A，I_2=6A

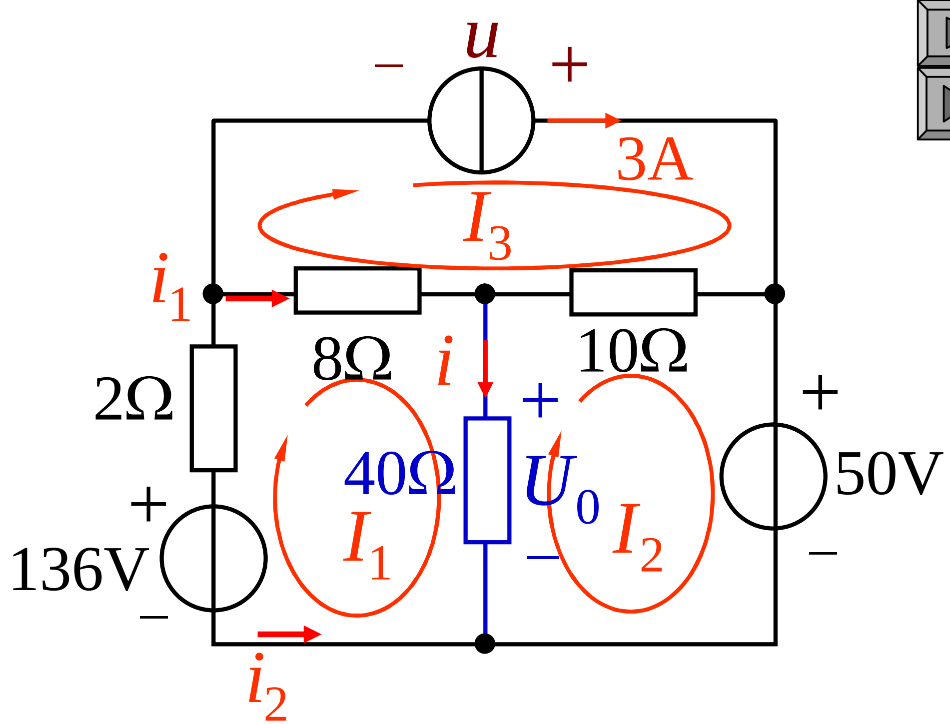
$U_0=40i=40(I_1-I_2)=80V$

通过本例可知：各支路电流和电压都可以用网孔电流表示，比如：

$$i = I_1 - I_2$$

$$i_1 = I_1 - I_3$$

$$i_2 = -I_1$$



- 所以网孔电流是一组<u>完备的</u>独立变量。
- 对无伴电流源的处理方法是：
  虚设一个变量，同时附加一个方程。

§3–5　回路电流法

- 网孔电流法仅适用于平面电路。
- 回路电流法既适用于平面电路，也适用于非平面电路，是一种适用性较强的分析方法。
- 回路电流是一个在回路中连续流动的假想电流，以假想的独立回路电流为变量，只需列写KVL方程即可求解。
- 若选基本回路作为独立回路，则回路电流就是连支电流。

把连支电流 i_1、i_2、i_3分别作为在各自单连支回路中流动的假想回路电流i_{l1}、i_{l2}、i_{l3}。

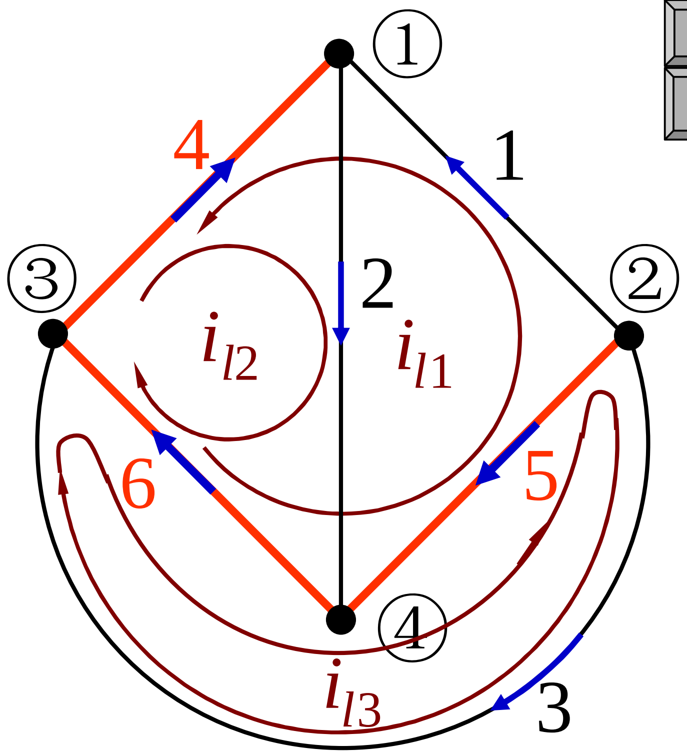
即 $i_1 = i_{l1}$，$i_2 = i_{l2}$，$i_3 = i_{l3}$

而树支电流：

$i_4 = -i_{l1} + i_{l2}$

$i_5 = -i_{l1} - i_{l3}$

$i_6 = -i_{l1} + i_{l2} - i_{l3}$



- 可见，全部支路电流都可以通过回路电流表达。

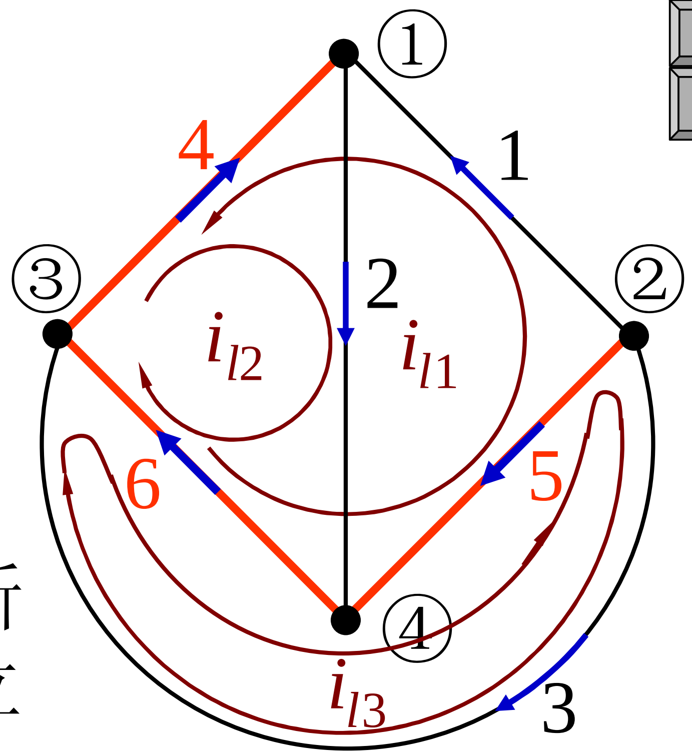
故回路电流也是一组完备的独立变量。

分别对结点① ② ③列KCL方程

①：$i_4 = -i_1 + i_2 = -i_{l1} + i_{l2}$

②：$i_5 = -i_1 - i_3 = -i_{l1} - i_{l3}$

③：$i_6 = -i_1 + i_2 - i_3 = -i_{l1} + i_{l2} - i_{l3}$



- 回路电流的假定自动满足KCL。
- 回路电流法与网孔电流法的分析过程基本相同，差别仅在于独立回路的选择上：

网孔电流法要求选平面电路全部自然的“孔”作为一组独立回路，有局限性。回路电流法选不同的树，可得不同的基本回路组。也可以不选基本(单连支)回路作为独立回路，灵活性和适用性都比较强。

1. 回路电流方程的一般形式

- 对于有b条支路、n个结点的电路，(独立)回路电流数 $l = b-(n-1)$，故只需列KVL方程。

其一般形式与网孔电流法相似：

$$
\begin{aligned}
R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}+R_{13}i_{l3}+\cdots+R_{1l}i_{ll} &= u_{s11} \\
R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l2}+R_{23}i_{l3}+\cdots+R_{2l}i_{ll} &= u_{s22} \\
R_{31}i_{l1}+R_{32}i_{l2}+R_{33}i_{l3}+\cdots+R_{3l}i_{ll} &= u_{s33} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
R_{l1}i_{l1}+R_{l2}i_{l2}+R_{l3}i_{l3}+\cdots+R_{ll}i_{ll} &= u_{sll}
\end{aligned}
$$

下标相同的$R_{11}\sim R_{ll}$为各回路的自阻，自阻总是正的。

下标不同的 R_{12}、R_{13}、R_{23}、R_{l1}、R_{1l} 等是回路间的互阻，互阻的正负要看两个相关回路共有支路上的回路电流方向："同正反负"

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots R_{1l} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots R_{2l} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots R_{3l} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ R_{l1} & R_{l2} & R_{l3} & \cdots R_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \\ \vdots \\ i_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s11} \\ u_{s22} \\ u_{s33} \\ \vdots \\ u_{sll} \end{bmatrix}$$

若两个回路间没有共有支路，或有，但仅含电压源，则互阻为0。

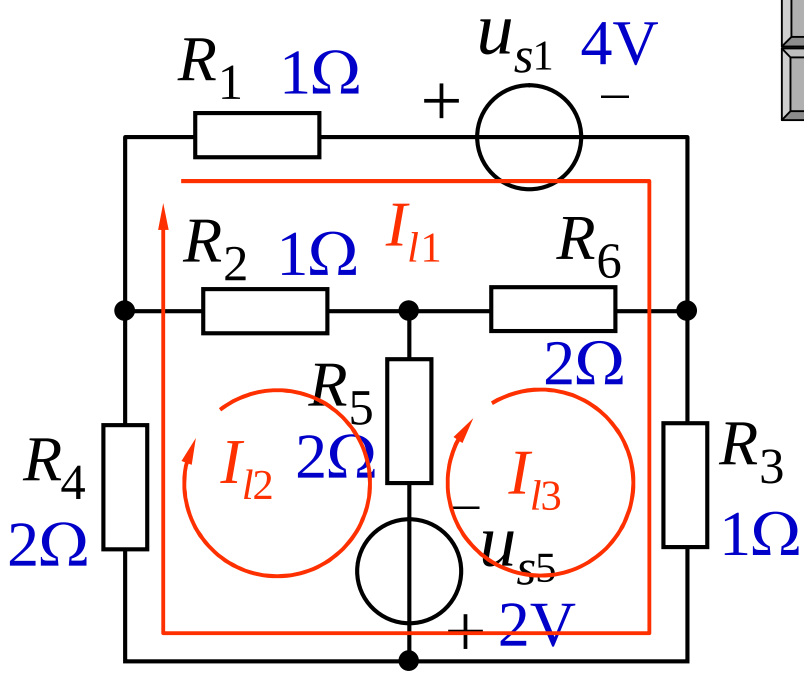
u_{s11}～ u_{sll}分别是回路1～l的电压源代数和，回路电流从电压源正极流出取正，流入取负。

2. 例题分析 P65 例3-2

- 电路不很复杂，可直接在原电路上用<u>观察法</u>列回路方程。
- 选一组独立回路；

至少有一条新支路。

即该支路未在其它回路中出现。



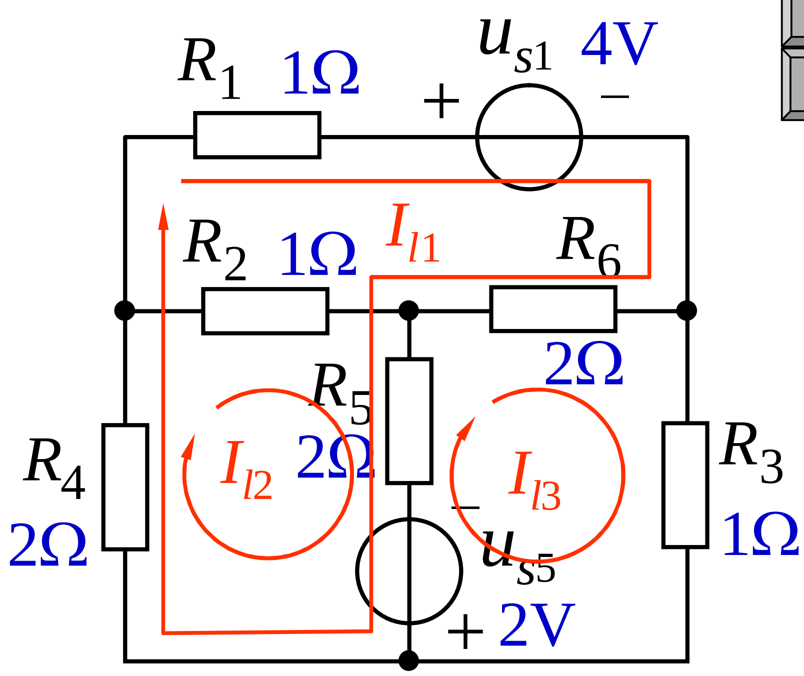
$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{L1:}\quad 4I_{l1}+2I_{l2}+1I_{l3}=-4\\
&\text{L2:}\quad 2I_{l1}+5I_{l2}-2I_{l3}=2\\
&\text{L3:}\quad 1I_{l1}-2I_{l2}+5I_{l3}=-2
\end{aligned}
\right\}
$$

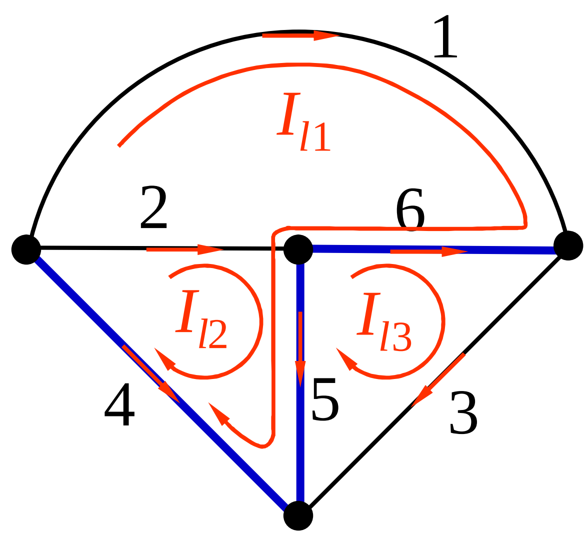
解之即可。

2. 例题分析　P65　例3−2

- 电路不很复杂，可用观察法直接列出回路方程。
- 若选基本回路，则应先选一个树。

  连支电流为回路电流。





$$\text{L1:}\quad 7I_{l1} + 4I_{l2} - 4I_{l3} = -2$$

$$\text{L2:}\quad 4I_{l1} + 5I_{l2} - 2I_{l3} = 2$$

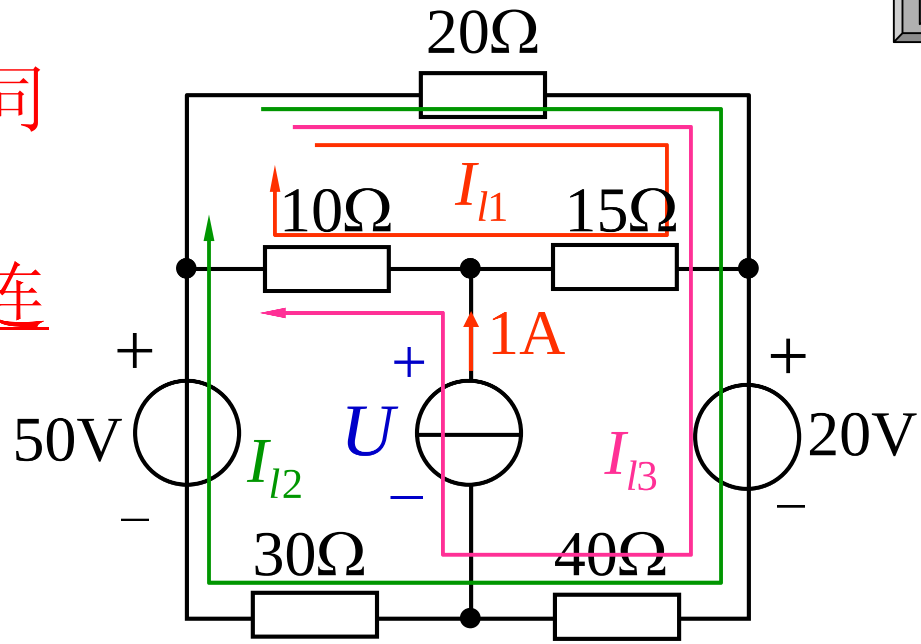
$$\text{L3:}\quad -4I_{l1} - 2I_{l2} + 5I_{l3} = -2$$

P67 例3−3 含无伴电流源的处理方法。

(1)仍然是虚设一个变量，同时附加一个方程。

(2)尽量把无伴电流源选为连支电流。

这样可以减少方程数。

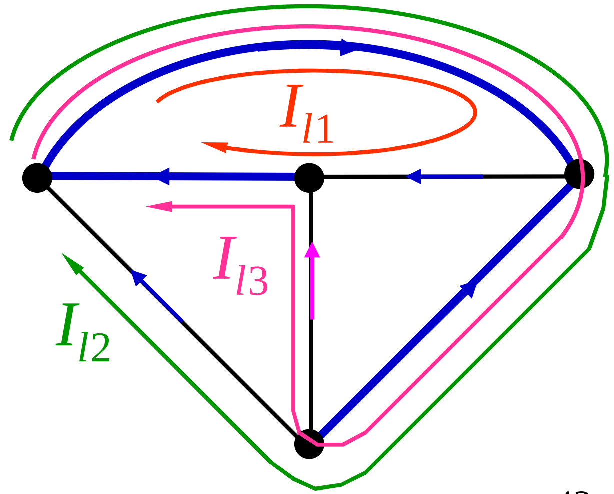


$$45I_{l1}+20I_{l2}+30I_{l3}=0$$

$$20I_{l1}+90I_{l2}+60I_{l3}=30$$

$$\cancel{30I_{l1}+60I_{l2}+70I_{l3}=U-20}$$

附加方程：$I_{l3}=1$

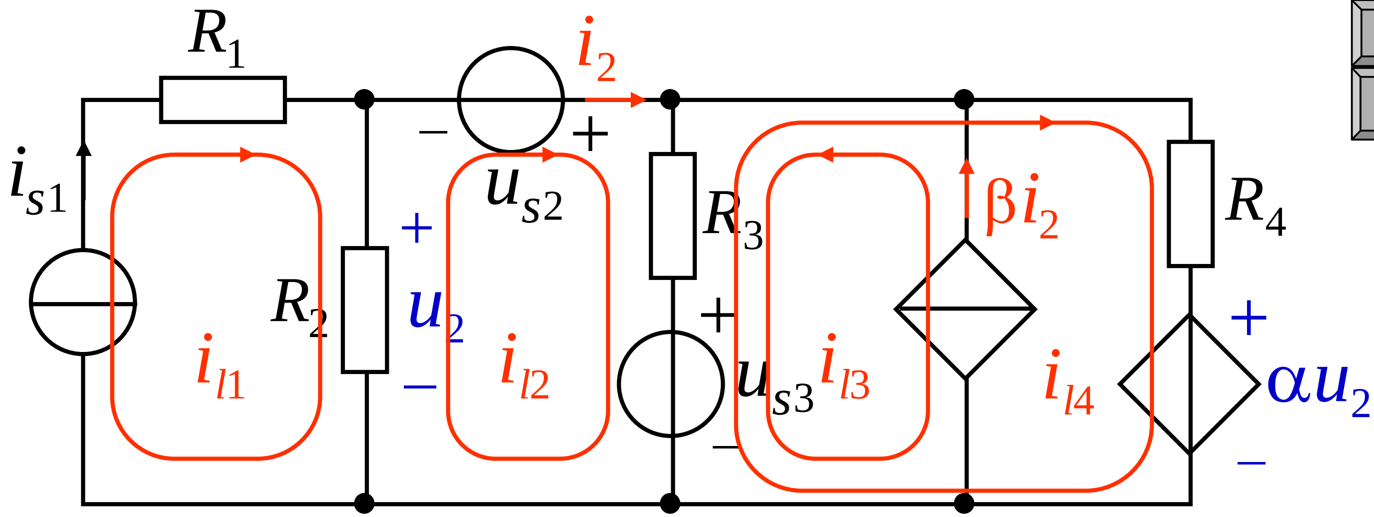


不必列电流源所在回路的方程。

P67-68 例3−4 含受控源的处理

- 先把受控源当作独立电源，而控制量用回路电流表示。
- 用观察法写出“初步的”方程。
- 然后，把受控电压源移到方程左边。
- 若是受控电流源则按独立电流源的方法处理。
- 行列式将不再对称。

把两个无伴电流源分别选为回路电流。



L2： $-R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)i_{l2}+R_3 i_{l3}-R_3 i_{l4}=u_{s2}-u_{s3}$

L4： $-R_3 i_{l2}-R_3 i_{l3}+(R_3+R_4)i_{l4}=u_{s3}-\alpha u_2$

不必再列回路1、3的KVL方程。

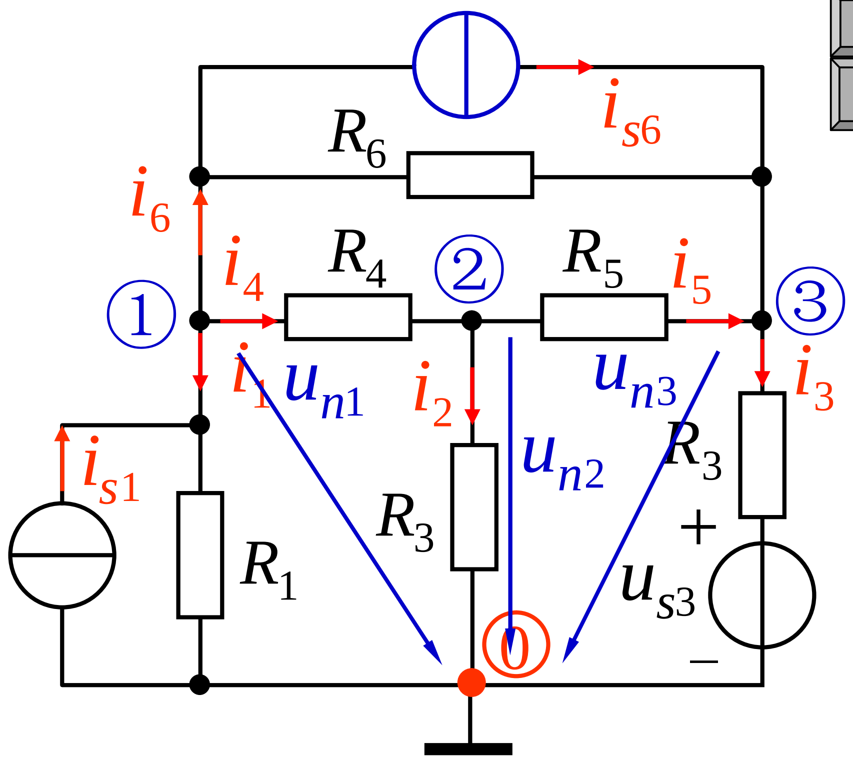
附加： $i_{l1}=i_{s1}$， $i_{l3}=\beta i_{l2}$

$$\alpha u_2=\alpha R_2(i_{l1}-i_{l2})=\alpha R_2 i_{l1}-\alpha R_2 i_{l2}$$

$$\alpha R_2 i_{l1}-(\alpha R_2+R_3)i_{l2}-R_3 i_{l3}+(R_3+R_4)i_{l4}=u_{s3}$$

§3-6 结点电压法

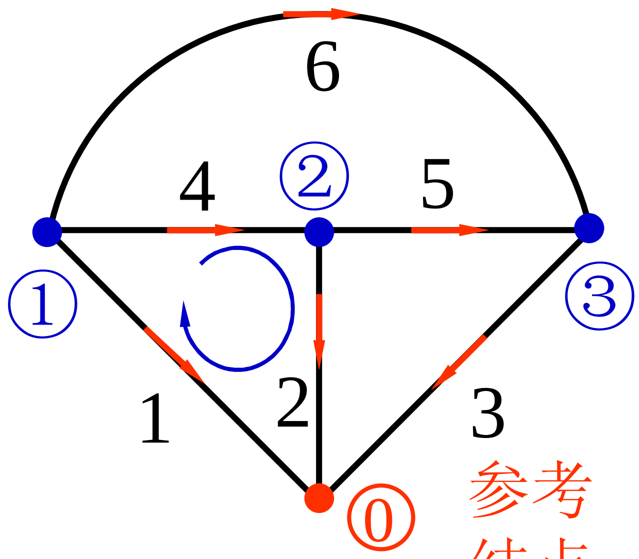
- 任意选择电路中某一结点为参考结点，其它结点与此参考结点之间的电压称为结点电压。
- 结点电压的参考极性均以参考结点处为负。



- 具有*n*个结点的电路有(*n*−1)个独立结点，当回路(或网孔)多而结点少时，此法较方便。

1. 结点电压也是一组完备的独立变量

- 接在结点与参考节点之间的支路，其支路电压值即为节点电压值：
- $u_{n1}=u_1$， $u_{n2}=u_2$， $u_{n3}=u_3$



- 而接在两节点之间的支路，支路电压为两节点电压之差：如由KVL $-u_1+u_4+u_2=0$

$$u_4=u_1-u_2 \quad =u_{n1}-u_{n2}$$

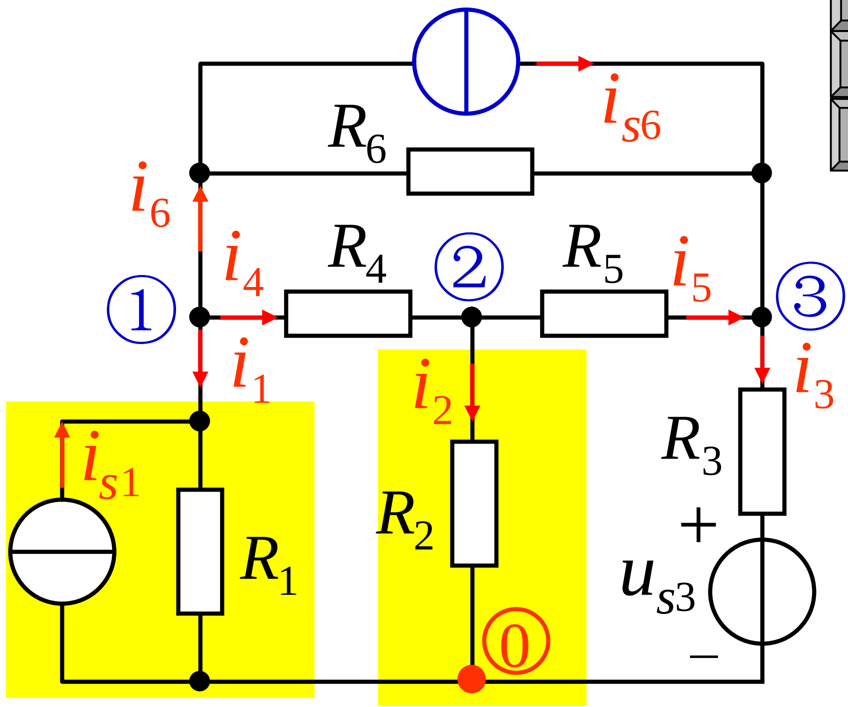
同理：$u_5=u_{n2}-u_{n3}$

$$u_6=u_{n1}-u_{n3}$$

$u_1\sim u_6$ 都能用 $u_{n1}\sim u_{n3}$ 表示。

2. 结点电压法的实质

- 以结点电压为变量对独立结点列KCL方程!
- 求出各结点电压后，进而可求各支路电压或电流。



- 用结点电压表示各支路电流：

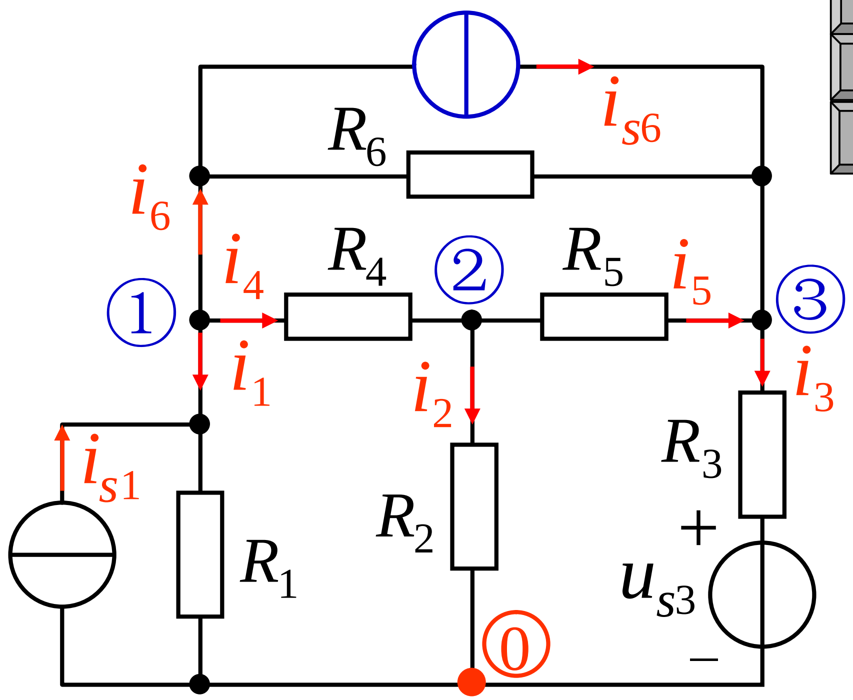
$$i_1 = \frac{u_{n1}}{R_1} - i_{s1} \qquad i_2 = \frac{u_{n2}}{R_2} \qquad i_3 = \frac{u_{n3} - u_{s3}}{R_3}$$

$$i_4 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} \qquad i_5 = \frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_5} \qquad i_6 = \frac{u_{n1} - u_{n3}}{R_6} + i_{s6}$$

$$
\begin{cases}
i_1 = \dfrac{u_{n1}}{R_1} - i_{s1} \\
i_2 = \dfrac{u_{n2}}{R_2} \\
i_3 = \dfrac{u_{n3}-u_{s3}}{R_3} \\
i_4 = \dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4} \\
i_5 = \dfrac{u_{n2}-u_{n3}}{R_5} \\
i_6 = \dfrac{u_{n1}-u_{n3}}{R_6} + i_{s6}
\end{cases}
$$

对结点① ② ③用KCL:

$$
\begin{cases}
i_1+i_4+i_6=0 \\
i_2-i_4+i_5=0 \\
i_3-i_5-i_6=0
\end{cases}
$$



代入

$$
\underbrace{\frac{u_{n1}}{R_1}-i_{s1}}_{i_1}+\underbrace{\frac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}}_{i_4}+\underbrace{\frac{u_{n1}-u_{n3}}{R_6}+i_{s6}}_{i_6}=0
$$

整理

$$
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_4}u_{n2}-\frac{1}{R_6}u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}
$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_4}u_{n2}-\frac{1}{R_6}u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}$$

同理可列出结点②、③的方程如下

$$-\frac{1}{R_4}u_{n1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_{n2}-\frac{1}{R_6}u_{n3}=0$$

$$-\frac{1}{R_6}u_{n1}-\frac{1}{R_5}u_{n2}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)u_{n3}=i_{s6}+\frac{u_{s3}}{R_3}$$

把 $\frac{1}{R_1}\sim\frac{1}{R_6}$ 换成 $G_1\sim G_6$

$$(G_1+G_4+G_6)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_6u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}$$

$$-G_4u_{n1}+(G_2+G_4+G_5)u_{n2}-G_5u_{n3}=0$$

$$-G_6u_{n1}-G_5u_{n2}+(G_3+G_5+G_6)u_{n3}=i_{s6}+G_3u_{s3}$$

①： $(G_1+G_4+G_6)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_6u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}$

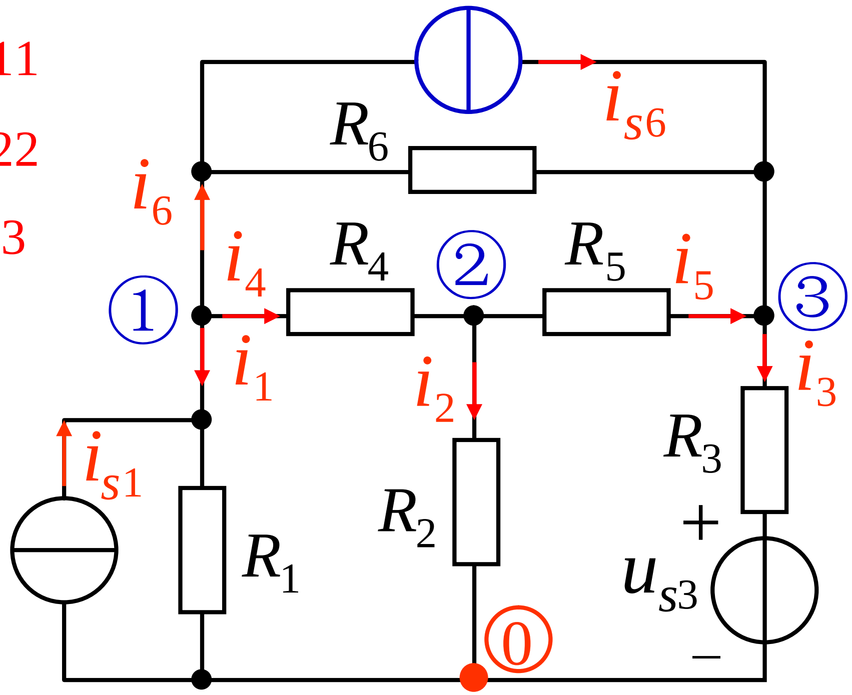
②： $-G_4u_{n1}+(G_2+G_4+G_5)u_{n2}-G_5u_{n3}=0$

③： $-G_6u_{n1}-G_5u_{n2}+(G_3+G_5+G_6)u_{n3}=i_{s6}+G_3u_{s3}$

①： $G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+G_{13}\,u_{n3}=i_{s11}$

②： $G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+G_{23}u_{n3}=i_{s22}$

③： $G_{31}u_{n1}+G_{32}u_{n2}+G_{33}u_{n3}=i_{s33}$



3. 用观察法列写方程

- $G_{11}=(G_1+G_4+G_6)$ 为结点①的自导；

$G_{22}=(G_2+G_4+G_5)$

$G_{33}=(G_3+G_5+G_6)$ 分别为结点② ③的自导。 自导总是正的！

①：$(G_1+G_4+G_6)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_6u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}$

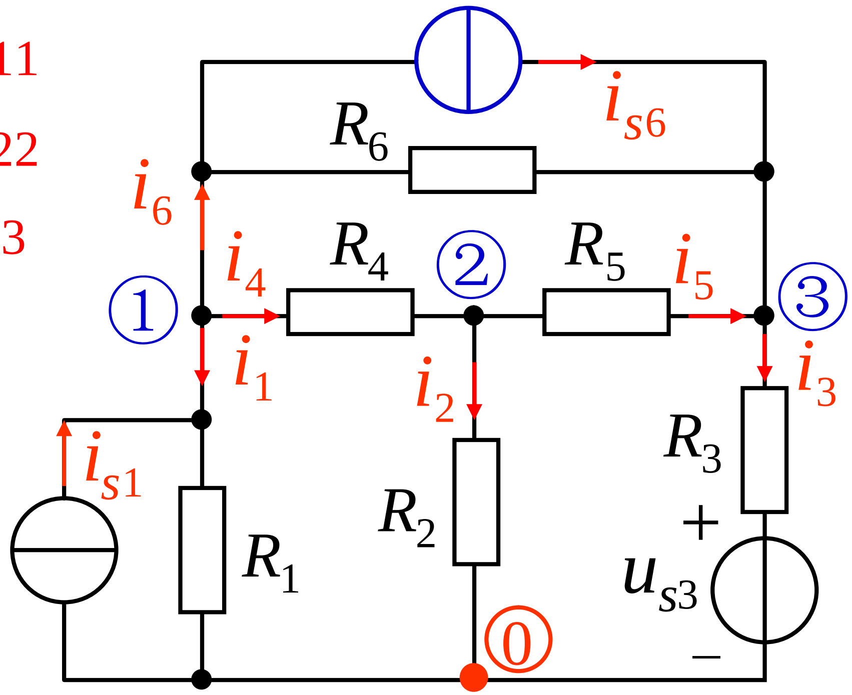
②：$-G_4u_{n1}+(G_2+G_4+G_5)u_{n2}-G_5u_{n3}=0$

③：$-G_6u_{n1}-G_5u_{n2}+(G_3+G_5+G_6)u_{n3}=i_{s6}+G_3u_{s3}$

①：$G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+G_{13}u_{n3}=i_{s11}$

②：$G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+G_{23}u_{n3}=i_{s22}$

③：$G_{31}u_{n1}+G_{32}u_{n2}+G_{33}u_{n3}=i_{s33}$



$G_{12}=G_{21}=-G_4$

$G_{23}=G_{32}=-G_5$

$G_{13}=G_{31}=-G_6$

分别是结点①、②结点②、③和结点①、③间的互导。 互导总是负的！

①：$(G_1+G_4+G_6)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_6u_{n3}=i_{s1}-i_{s6}$

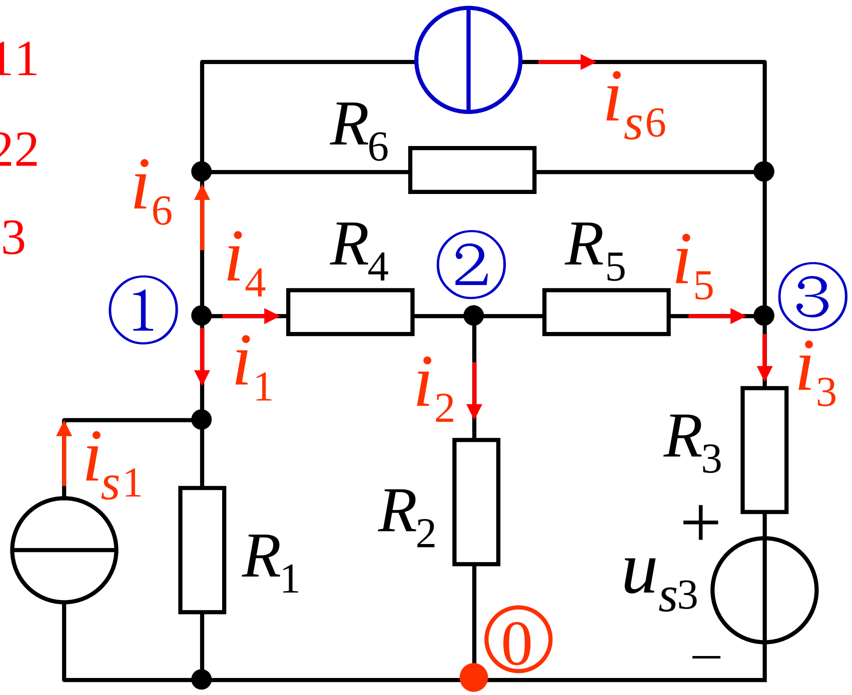
②：$-G_4u_{n1}+(G_2+G_4+G_5)u_{n2}-G_5u_{n3}=0$

③：$-G_6u_{n1}-G_5u_{n2}+(G_3+G_5+G_6)u_{n3}=i_{s6}+G_3u_{s3}$

①：$G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+G_{13}u_{n3}=i_{s11}$

②：$G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+G_{23}u_{n3}=i_{s22}$

③：$G_{31}u_{n1}+G_{32}u_{n2}+G_{33}u_{n3}=i_{s33}$



$i_{s11}=i_{s1}-i_{s6}$， $i_{s22}=0$，

$i_{s33}=i_{s6}-G_3u_{s3}$

分别是结点①、②、③的注入电流。

入正出负！

- 对电压源与电阻的串联组合，可将其等效变换成电流源。

4. 推广

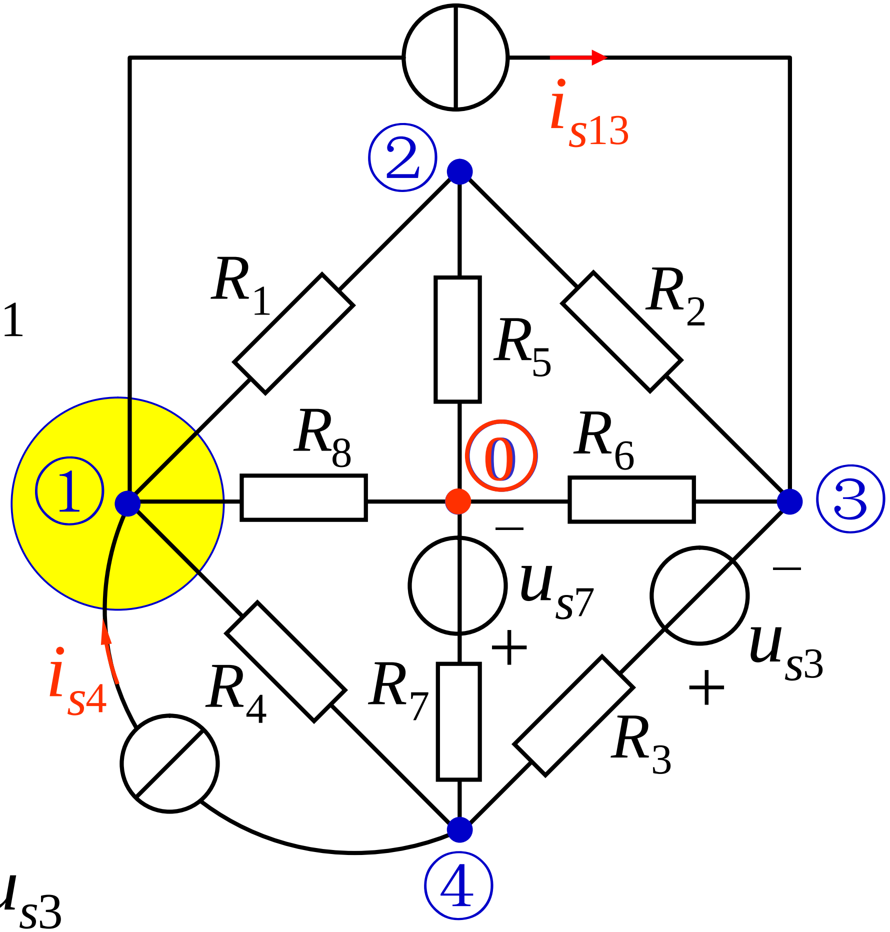
- 对具有n−1个独立结点的电路，结点电压方程的一般形式为：

$$
\begin{aligned}
&G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+G_{13}u_{n3}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s11}\\
&G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}-G_{23}u_{n3}+\cdots+G_{2(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s22}\\
&G_{31}u_{n1}+G_{32}u_{n2}+G_{33}u_{n3}+\cdots+G_{3(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s33}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&G_{(n-1)1}u_{n1}+G_{(n-1)2}u_{n2}+G_{(n-1)3}u_{n3}+\\
&\qquad\cdots+G_{(n-1)(n-1)}\ u_{(n-1)(n-1)}=i_{s(n-1)(n-1)}
\end{aligned}
$$

- 对只含独立电源的线性电阻电路，互导$G_{ij}=G_{ji}$，方程组的行列式是对称的。

教材P71 例3-5

选 ⓪ 为参考结点。



对结点①: $(G_1+G_4+G_8)u_{n1}$
$-G_1 u_{n2} - G_4 u_{n4} = i_{s4} - i_{s13}$

②: $(G_1+G_2+G_5)u_{n2}$
$-G_1 u_{n1} - G_2 u_{n3} = 0$

③: $(G_2+G_3+G_6)u_{n3}$
$-G_2 u_{n2} - G_3 u_{n4} = i_{s13} - G_3 u_{s3}$

④: $(G_3+G_4+G_7)u_{n4} - G_4 u_{n1} - G_3 u_{n3}$
$= G_3 u_{s3} + G_7 u_{s7} - i_{s4}$

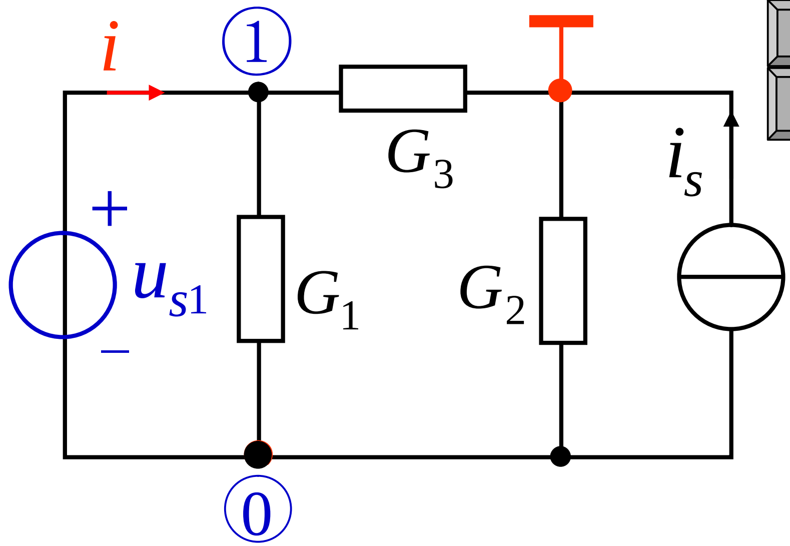
代入数据求解方程即可。

例3-6 (略)

5. 对无伴电压源的处理

教材P73 例3-7

- 虚设无伴电压源支路的电流为变量。



$$(G_1+G_3)u_{n1}-G_3u_{n2}=i$$

$$-G_3u_{n1}+(G_2+G_3)u_{n2}=i_{s2}$$

补充方程： $u_{n1}=u_{s1}$

因 u_{s1} 是已知量，所以 $u_{n1}=u_{s1}$ 不解自知。由第二个方程可求出 u_{n2}。

若选结点②为参考结点，则列出方程为：

$$(G_1+G_3)u_{n1}-G_1u_{n0}=i$$

$$-G_1u_{n1}+(G_1+G_2)u_{n0}=-i_{s2}-i$$

补充方程 $u_{n1}-u_{n0}=u_{s1}$

比较复杂

通过例3-7可知：

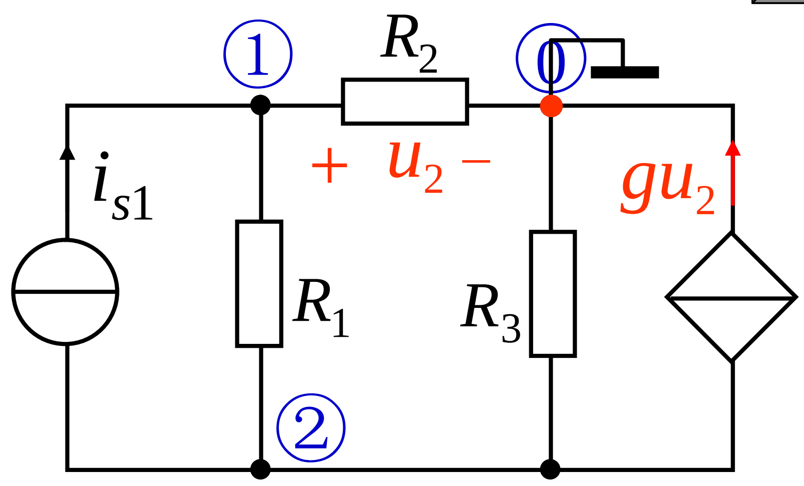
- 每虚设一个变量 （无伴电压源的电流），
- 就要附加一个方程 （结点电压与电压源电压之间的约束关系），
- 这样方程数将与变量数相同。
- 选参考结点时，尽量把无伴电压源选为结点电压。
- 这样可以减少方程数。

6. 含受控源的处理　　教材P74 例3-8

(1)控制量用结点电压表示：

选 “0”为参考结点

$$u_{n1}=u_2$$



(2)暂将受控源当作独立电源，列结点电压方程：

①: $$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_1}u_{n2}=i_{s1}$$

②: $$+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_{n2}=-i_{s1}-gu_{n1}$$

$$\left(-\frac{1}{R_1}+g\right)u_{n1}$$

行列式将不再对称。

(3)把用结点电压表示的受控源移到方程左边。

归纳：用观察法列结点电压方程的要点

1. 指定参考结点(极性为“–”)，其余结点与参考结点之间的电压就是结点电压；
2. 用观察法列结点电压方程时注意:

   自导总是正的，互导总是负的；对注入各结点的电流项，前面的符号是入正出负。
3. 若含受控源，设法用结点电压表示控制量，暂把受控源当作独立电源。待列出初步方程后，再把用结点电压表示的受控源项移到方程的左边。
4. 若含无伴电压源，尽量将其选为结点电压，则此结点方程可不必列出。

本章结束